

Mémoire de Master

Sous-groupes discrets de groupes pleins

Eliot Martin

sous la direction de

François Le Maître

Année 2025 / 2026

Résumé

L'étude des sous-groupes discrets d'un groupe topologique est une question naturelle ayant des origines en arithmétique [All66], géométrie [BL04] et théorie de Lie [Kur51], [Wan75]. Étant donné groupe topologique G agissant sur un espace de probabilité en préservant la mesure, on peut se demander quels sont les groupes pouvant être réalisés comme sous-groupes discrets de G , ou s'il existe un sous-groupe H discret n'étant contenu dans aucun autre sous-groupe discret de G . Une fois un sous-groupe discret identifié, on peut chercher à déterminer la mesure de l'ensemble des points sur lesquels un élément donné agit non trivialement. Un sous-groupe est alors discret si le support de ses éléments non triviaux est uniformément minoré par une constante strictement positive. Nous nous intéresserons particulièrement aux groupes émergeant comme ensembles de transformations préservant une relation d'équivalence dite *orbitale* dont les classes sont réalisées comme orbites de l'action d'un groupe Γ sur un ensemble X muni d'une mesure de probabilité. Le groupe des transformations de X préservant à la fois la relation d'équivalence et la mesure est le *groupe plein* de la relation. Nous présentons les travaux de [ACTT] qui fournissent des conditions sur la structure de Γ , la nature de son action et la mesure du support de ses éléments empêchant Γ d'être discret dans le groupe plein de la relation d'équivalence associée.

Table des matières

1	Introduction.	3
2	Groupe plein d'une relation d'équivalence	4
2.1	Espaces de probabilité standards	4
2.2	Equivalence orbitale	5
2.3	Relations d'équivalence pmp	7
2.4	Le théorème de Dye.	9
2.5	Actions de groupes moyennables	14
2.6	Groupe d'automorphisme d'un espace de probabilité standard	16
2.6.1	Topologie faible.	16
2.6.2	Topologie uniforme	18
2.7	Quelques propriétés du groupe plein	20
3	Sous-groupes discrets d'un groupe plein	22
3.1	Actions discrètes	22
3.2	Groupes sans identité mixte.	24
3.2.1	Résultats principaux	24
3.2.2	Actions faiblement mélangeantes	25
3.3	Actions mélangeantes.	28
3.4	Actions ergodiques des groupes MIF	29
4	Actions compactes	33
4.1	Actions profinies	33
4.2	Actions compactes essentiellement libres	34
4.3	Suites convergentes dans les groupes discrets	36
4.4	Complétion profinie.	40

1 Introduction

Ce mémoire a pour sujet l'étude des sous-groupes discrets de groupes apparaissant comme ensembles de transformations d'un espace de probabilité (X, μ) préservant la mesure. On présente les résultats de [ACTT] donnant des conditions à vérifier pour qu'un groupe apparaisse comme sous groupe discret du groupe plein d'une relation d'équivalence : c'est un groupe polonais qui encode entièrement la relation d'équivalence : deux actions de groupes induisent la même partition en orbites (à une bijection préservant la mesure près) si et seulement si leurs groupes pleins sont isomorphes, cf. [Dye63].

Dans la première partie, les notions de base concernant les relations d'équivalences sur les espaces mesurables et de probabilité standards sont introduites. On y définit les relations d'équivalence boréliennes et on présente le Théorème de Feldman-Moore [FM77] qui dit que les classes de toute relation d'équivalence borélienne dénombrable sur X borélien standard sont réalisables comme orbites d'une action de groupe. Ensuite, on présente le théorème de Dye [Dye59] qui dit que deux actions ergodiques de $\mathbb{Z}$ ont les mêmes orbites. Enfin on utilise ce résultat et un théorème de Connes, Feldman et Weiss pour conclure que les actions de deux groupes moyennables sont isomorphes et induisent la relation d'équivalence hyperfinie.

Dans la seconde partie, on étudie les résultats de l'article [ACTT] qui décrit les sous-groupes discrets du groupe plein d'une relation d'équivalence. On commence par étudier les actions discrètes de groupes dits sans identité mixte. Les propriétés dynamiques de ces actions tels que le mélange et l'ergodicité sont étudiées. On montre en particulier que si l'action faiblement mélangeante, essentiellement libre d'un groupe sans identité mixte Γ produit un groupe plein contenant un élément dont la mesure de l'ensemble des points fixes est suffisamment grande, alors il est possible de construire une suite explicite d'éléments du groupe plein dont la limite agit trivialement.

Dans la dernière partie, on s'intéresse au cas des actions de sous-groupes compacts du groupe d'automorphisme d'un espace de probabilité. On établit notamment qu'une action discrète ergodique compacte d'un groupe sans identité mixte est nécessairement essentiellement libre. La contraposée de ce résultat nous dit qu'une action de groupe ergodique compacte non libre admet des transformations fixant un sous-ensemble de mesure arbitrairement grande. Cependant, le choix d'une suite de transformation asymptotiquement triviale dépend à priori de l'action, en lien avec cette question, on donne un résultat de A. Thom [Tho13] sur la convergence des suites dans un groupe discret en terme de ses représentations unitaires.

2 Groupe plein d'une relation d'équivalence

Dans cette section, nous introduisons la notion de groupe plein d'une relation d'équivalence et donnons quelques résultats concernant le lien entre sa structure et celle de la relation.

2.1 Espaces de probabilité standards

Un *isomorphisme* entre deux espaces de probabilité $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ est une application bijective bimesurable

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

où $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ sont tels que $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) = 1$ et en restriction à A_1 et A_2 , on a $f_*\mu_1 = \mu_2$. Deux espaces de probabilité $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux. Un *automorphisme* d'un espace de probabilité $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un isomorphisme de X vers lui-même. Une application $f : X \rightarrow X$ mesurable telle que $f_*\mu = \mu$ est dite *préservant la mesure de probabilité*, abrégé *pmp* dans ce qui suit.

Convention : Par souci de simplicité, on notera (X, μ) un espace de probabilité $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et on appellera *mesurables* les éléments de $\mathcal{F}$.

Notons qu'un automorphisme d'un espace de probabilité peut être étendu à l'espace tout entier.

Proposition 2.1. Soit (X, μ) un espace de probabilité et $f : A \rightarrow B$ un automorphisme de X . Alors il existe $\varphi : X \rightarrow X$ bimesurable bijective telle que $\varphi_*\mu = \mu$ et $\mu(\{x \in X \mid \varphi(x) \neq f(x)\}) = 0$.

Preuve. Soit $C_0 = A \cap B$. On définit par récurrence $C_{n+1} = f^{-1}(C_n) \cap C_n \cap f(C_n)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mu(C_n) = 1$ et en posant $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, $\mu(C) = 1$. Par construction, $f^{\pm 1}(C_{n+1}) \subseteq C_n$ d'où

$$f^{\pm 1}(C) \subseteq C \text{ et } f^{\pm 1}(C) = C.$$

Alors

$$\varphi = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

convient. □

Définition 2.2. On note $\text{Aut}(X, \mu)$ l'ensemble des automorphismes de (X, μ) modulo la relation d'équivalence

$$T \simeq T' \iff \mu(\{x \in X \mid T(x) \neq T'(x)\}) = 0.$$

La définition suivante décrit la classe d'espaces de probabilité qui sera étudiée dans ce document.

Définition 2.3. Un espace de probabilité (X, μ) est dit *quasi-standard* s'il est isomorphe à $([0, 1], \text{Leb})$ où Leb est la mesure de Lebesgue, et *standard* s'il existe $f : (X, \mu) \rightarrow ([0, 1], \text{Leb})$ une bijection bi-mesurable telle que $f_*\mu = \text{Leb}$.

Exemple 2.4. (i) Si μ est une mesure de probabilité sans atomes sur l'intervalle $[0, 1]$, alors $([0, 1], \mu)$ est quasi-standard.

(ii) L'espace de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de probabilité $\mu = \left(\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)\right)^{\otimes \mathbb{N}}$ est standard.

De manière équivalente, un espace de probabilité (X, μ) est standard s'il est sans atome et que X est un espace polonais (séparable admettant une métrique complète compatible avec la topologie) muni de la tribu borélienne.

2.2 Equivalence orbitale

Dans tout ce qui suit, Γ est un groupe dénombrable infini et (X, μ) est un espace de probabilité standard. L'action de Γ sur X induit une relation d'équivalence entre les points d'une même orbite, la théorie de l'équivalence orbitale, une branche de la théorie ergodique, s'intéresse alors aux liens entre propriétés algébriques de Γ et structure de l'espace des orbites X/Γ . Une condition essentielle à l'étude de cette action est la préservation de la mesure de probabilité.

Définition 2.5. Une action *préservant la mesure de probabilité*, abrégé *pmp*, de Γ sur (X, μ) est une action de Γ sur X , i.e. une application

$$\begin{aligned}\alpha : \Gamma \times X &\rightarrow X \\ (\gamma, x) &\mapsto \gamma \cdot x\end{aligned}$$

vérifiant pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $x \in X$, $\gamma \cdot (\gamma' \cdot x) = (\gamma\gamma') \cdot x$, $e_\Gamma \cdot x = x$, telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, la bijection de X induite par γ est bimesurable et $\gamma_*\mu = \mu$.

On notera cette action $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, ou simplement $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ si l'action de Γ est sous-entendue.

Exemple 2.6. Soit $X = [0, 1]^\Gamma$, ν une mesure de probabilité non dégénérée, i.e. il existe A mesurable tel que $0 < \nu(A) < 1$. Si $\mu = \nu^{\otimes \Gamma}$, on obtient une action pmp de Γ sur X par décalage : pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $(x_g)_g \in X$, on pose $\gamma \cdot (x_g)_g = (x_{\gamma^{-1}g})_g$.

En remplaçant $[0, 1]$ par $\{0, 1\}$ muni de la mesure $\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, on obtient une action pmp de Γ sur l'ensemble $\text{Sub}(\Gamma)$ de ses sous-groupes.

En effet, pour tout $S \subseteq \Gamma$ fini et $s : S \rightarrow \{0, 1\}$, notons $C_s = \{f : \Gamma \rightarrow \{0, 1\} \mid f|_{\text{dom}(s)} = s\}$. Alors les C_s forment une base d'ouverts de $\{0, 1\}^\Gamma$ et pour tout s et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot C_s = C_{\gamma s}$. Or $\mu(C_s) = 2^{-|\text{dom}(s)|}$, le résultat en découle.

Les actions qui nous intéresseront sont celles qui sont "indécomposables" dans le sens suivant.

Définition 2.7. Une action pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est dite *ergodique* si pour tout $A \subseteq X$ mesurable tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot A = A$, on a $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

Exemple 2.8 (Décalage sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$). Pour tout $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, notons

$$N(x, y) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n \text{ ou } x_{-n} \neq y_{-n}\}$$

et $N(x, y) = +\infty$ si $x = y$. On définit la distance

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-N(x, y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette construction fait de X un espace topologique compact. Dans la suite, on le munit de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$.

Le décalage $\sigma : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un homéomorphisme pmp ergodique pour la mesure $\left(\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)\right)^{\otimes \mathbb{Z}}$. En fait, l'action de $\mathbb{Z}$ induite par σ est même mélangeante : pour tous $A, B \in X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ mesurables,

$$\mu(A \cap \sigma^{-n}(B)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B)$$

ce qui implique clairement l'ergodicité.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \{0, 1\}^n$ et $m \in \mathbb{Z}$, notons

$$C_a^m = \{x \in X \mid x_m = a_0, \dots, x_{m+n} = a_{n-1}\}.$$

Alors $\sigma(C_a^m) = C_a^{m+1}$. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $a \in \{0, 1\}^{n_1}$, $b \in \{0, 1\}^{n_2}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, alors pour $n \geq N = m_1 + n_1 - m_2 + 1$, on a

$$C_{a_1}^{m_1} \cap \sigma^{-n}(C_{a_2}^{m_2}) = \emptyset.$$

Donc pour $n \geq N$, $\mu(C_{a_1}^{m_1} \cap \sigma^n(C_{a_2}^{m_2})) = 0$. Maintenant, pour tout cylindre C l'ensemble des $A \in X$ mesurables tels que

$$\mu(A \cap \sigma^{-n}(C)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(C)$$

est une σ -algèbre qui contient les cylindres, par le Théorème d'extension de Kolmogorov c'est la σ -algèbre $\mathcal{B}$ toute entière. Ainsi, pour tout $A \in X$ mesurables, l'ensemble des $B \in X$ mesurables tels que

$$\mu(A \cap \sigma^{-n}(B)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B)$$

est une σ -algèbre contenant les cylindres, d'où le mélange.

Plus généralement, pour tout groupe dénombrable Γ , le décalage $\Gamma \curvearrowright (\{0, 1\}^\Gamma, \nu^{\otimes \Gamma})$ est ergodique.

Définition 2.9. Soit $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action pmp. On appelle relation d'équivalence associée à α et on note

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(x, \gamma \cdot x) \mid x \in X, \gamma \in \Gamma\}$$

i.e. $x \mathcal{R}_\alpha y \iff \Gamma \cdot x = \Gamma \cdot y$.

Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp. Elle est dite *essentiellement libre* si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$, $\mu(\{x \in X \mid \gamma \cdot x = x\}) = 0$. On peut alors considérer une notion d'équivalence entre groupes infinis dénombrables en comparant les orbites de leurs actions.

Définition 2.10. Deux groupes infinis dénombrables Γ et Λ sont dits *orbitalement équivalents* s'il existe deux actions essentiellement libres $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sur (X, μ) standard telles qu'il existe $X_0 \subseteq X$ mesurable vérifiant $\mu(X_0) = 1$ et pour tout $x \in X_0$, $\Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x$.

Exemple 2.11. (Odomètre) Soit $\{0, 1\}$ muni de la mesure $\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ et $X = \{0, 1\}^{\otimes \mathbb{N}}$ muni de la mesure produit $\mu = \nu^{\otimes \mathbb{N}}$. Pour $x \in X$, on pose $i_0(x) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 1\}$. On considère l'action suivante de $\mathbb{Z}$ sur X qui consiste à ajouter 1 en base 2 :

$$1 \cdot (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ où } \begin{cases} y_i = 0 & \forall i < i_0(x) \\ y_{i_0(x)} = 1 \\ y_i = x_i & \forall i > i_0(x). \end{cases}$$

On définit de manière similaire une action de $\mathbb{Z}^2$ sur X en considérant l'action de $(1, 0)$ par addition de 1 en base 2 sur la sous-suite de x indexée par les coefficients pairs et celle de $(0, 1)$ par addition de 1 sur la sous-suite indexée par les coefficients pairs.

Ces deux actions donnent l'équivalence orbitale entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$, en effet, deux éléments de X sont dans la même orbite si et seulement s'ils diffèrent d'un nombre fini de coefficients.

L'équivalence orbitale entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ est un cas particulier d'un résultat général qui sera présenté dans la section 2.5.

2.3 Relations d'équivalence pmp

Définition 2.12. Un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ est dit *Borélien standard* s'il existe une bijection bimesurable $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$.

Définition 2.13. Soit X un borélien standard. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X est dite *borélienne* si c'est un borélien de $X \times X$, et *dénombrable* si elle est à classes dénombrables.

Exemple 2.14. Si X est borélien standard et $\Gamma \curvearrowright X$ est une bijection borélienne, alors $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} = \{(x, \gamma \cdot x) \mid x \in X, \gamma \in \Gamma\}$ est une relation d'équivalence borélienne comme union des graphes des $\gamma \in \Gamma$. Elle est également dénombrable car Γ l'est.

Le Théorème suivant dit que les relations boréliennes dénombrables proviennent d'une action de groupe.

Théorème 2.15 (Feldman-Moore, [FM77]). *Soit X borélien standard, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur X . Alors il existe $\Gamma \curvearrowright X$ une action borélienne telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$.*

On admet le lemme suivant, voir [Kec95, Thm. 18.10].

Lemme 2.16 (Lusin-Novikov). *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur X borélien standard, alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \rightarrow X$ borélienne telles que*

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{graphe}(f_n).$$

Preuve du Thm. de Feldman-Moore. Soit $(C_n)_n$ boréliens tels que pour tout $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in C_n$, $y \notin C_n$. Soit $(f_n)_n$ la suite d'applications boréliennes données par le Lemme 2.16. Si $A \subseteq X^2$, on note $A^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$. On a pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $\text{graphe}(f_n) \cap \text{graphe}(f_m)^{-1}$ est le graphe d'une bijection partielle de X , i.e. une bijection définie sur un sous-ensemble de X . Si φ est une bijection partielle telle que $\text{dom } \varphi \cap \text{img } \varphi = \emptyset$, on définit l'involution

$$I_\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \text{dom } \varphi \\ \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{img } \varphi \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\text{graphe}(\varphi) \subseteq \text{graphe}(I_\varphi)$ et $X \times X \setminus \{(x, x) \mid x \in X\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \times (X \setminus C_n)$. Donc

$$\mathcal{R} \setminus \{(x, x) \mid x \in X\} = \bigcup_{k, m, n \in \mathbb{N}} (C_n \times (X \setminus C_n)) \cap (\text{graphe}(f_n) \cap \text{graphe}(f_m)^{-1}).$$

Pour $k, m, n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_{k, m, n}$ la bijection partielle dont le graphe est $(C_n \times (X \setminus C_n)) \cap \text{graphe}(f_n) \cap \text{graphe}(f_m)^{-1}$. Soit $I_{\varphi_{k, m, n}}$ l'involution associée, on vérifie que $\text{graphe}(I_{\varphi_{k, m, n}})$ est borélien et par définition,

$$\mathcal{R} \setminus \{(x, x) \mid x \in X\} = \bigcup_{k, m, n \in \mathbb{N}} \text{graphe}(I_{\varphi_{k, m, n}}).$$

Il ne reste qu'à poser $\Gamma = \left\langle (I_{\varphi_{k, m, n}})_{k, m, n} \right\rangle$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$. □

On définit maintenant le groupe plein d'une relation d'équivalence, ses propriétés seront étudiées dans une section suivante.

Définition 2.17. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur (X, μ) un espace de probabilité standard. On appelle *groupe plein* de $\mathcal{R}$ et on note

$$[\mathcal{R}] = \{T : X \rightarrow X, \text{ bij}^\circ \text{ bimesurable} \mid \forall x \in X, (x, \varphi(x)) \in \mathcal{R}\}.$$

Le *pseudo-groupe plein* de la relation $\mathcal{R}$ est

$$[[\mathcal{R}]] = \{\varphi : \text{dom } \varphi \rightarrow \text{img } \varphi, \text{ bij}^\circ \text{ bimesurable entre boréliens} \mid \forall x \in X, (x, \varphi(x)) \in \mathcal{R}\}.$$

Définition 2.18. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dénombrable sur (X, μ) . On dit que $\mathcal{R}$ est *pmf* si pour tout $T \in [\mathcal{R}]$, $T_*\mu = \mu$.

On montre maintenant que la notion de pmp est bien définie, *i.e.* qu'elle ne dépend pas du groupe induisant la relation d'équivalence.

Théorème 2.19. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur (X, μ) un espace de probabilité standard. Sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{R}$ est pmp.
- (ii) Pour tout $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ borélienne telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$, l'action est pmp.
- (iii) Il existe $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ alors $\Gamma \leq [\mathcal{R}]$ donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma_*\mu = \mu$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) découle de Feldman-Moore.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Il faut montrer que pour tout $T \in [\mathcal{R}]$, $T_*\mu = \mu$. Soit $\Gamma = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de Γ . On définit par récurrence $A_n = \{x \in X \mid T(x) = \gamma_n(x)\} \setminus \bigcup_{k < n} A_k$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de X en ensembles mesurables et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T|_{A_n} = \gamma_n|_{A_n}$. Donc T est obtenue en recollant les automorphismes γ_n sur les A_n , et comme chacun de ces automorphismes préserve la mesure, T aussi. $\square$

Définition 2.20. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp sur (X, μ) , Soit $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence pmp sur (Y, ν) . Les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont dites *isomorphes* s'il existe $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ tous deux de mesure pleine et $\varphi : A \rightarrow B$ tels que pour tout $x \in A$,

$$\varphi([x]_{\mathcal{R}} \cap A) = [\varphi(x)]_{\mathcal{S}} \cap B.$$

D'après ces définitions, deux actions pmp sont donc orbitalement équivalentes si et seulement si les relations d'équivalence associées sont isomorphes.

Définition 2.21. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp sur (X, μ) . Un sous-ensemble mesurable $A \subseteq X$ est dit $\mathcal{R}$ -invariant si A est une union de classes de $\mathcal{R}$.

Cela équivaut à être invariant par l'action du groupe qui engendre $\mathcal{R}$ donné par le Théorème 2.15.

Définition 2.22. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est dite *ergodique* si pour tout $A \subseteq X$ mesurable $\mathcal{R}$ -invariant, $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

Alors $\mathcal{R}$ est ergodique si et seulement si l'action du groupe qui l'engendre l'est.

Proposition 2.23. Si $\mathcal{R}$ est isomorphe à $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}$ est ergodique si et seulement si $\mathcal{S}$ l'est.

2.4 Le théorème de Dye

On s'intéresse à l'équivalence orbitale entre actions pmp de $\mathbb{Z}$: le théorème de Dye dit qu'elles sont toutes orbitalement équivalentes. C'est un cas particulier d'un résultat général sur les actions des groupes moyennables qui sera étudié plus tard.

Définition 2.24. Une *algèbre booléenne* est un anneau unifère $(A, +, \times, 0, 1)$ tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

Par exemple si Y est un ensemble, $(P(Y), \Delta, \cap, \emptyset, Y)$ est une algèbre booléenne.

Définition 2.25. On note $\text{MAlg}(X, \mu)$ l'algèbre de mesure de μ , i.e. l'algèbre des ensembles boréliens de X , modulo les ensembles de mesure nulle.

L'algèbre $\text{MAlg}(X, \mu)$ est une algèbre de Boole polonaise pour la topologie induite par la métrique complète

$$d(A, B) = d_\mu(A, B) = \mu(A \Delta B).$$

Théorème 2.26 (Dye, [Dye63]). Soit $\mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu)$ et $\mathbb{Z} \curvearrowright (Y, \nu)$ deux actions pmp ergodiques. Alors elles sont orbitalement équivalentes.

Pour $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, on note $\mathcal{R}_T = \{(x, T^n(x)) \mid x \in X, n \in \mathbb{Z}\}$.

Si φ est un automorphisme partiel de (X, μ) , i.e. une bijection bimesurable $\varphi : A \rightarrow B$ entre boréliens $A, B \subseteq X$, on note $\mathcal{R}_\varphi = \{(x, \varphi^n(x)) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in A\}$.

Définition 2.27. Une échelle de hauteur $n \in \mathbb{N}$ est un automorphisme partiel $\varphi : \text{dom } \varphi \rightarrow \text{img } \varphi$ de (X, μ) tel que si $B = X \setminus \text{img } \varphi$, alors $X = \bigcup_{k=0}^{n-1} \varphi^k(B)$. B est la base de l'échelle.

On va montrer que toutes les actions pmp ergodiques de $\mathbb{Z}$ sont orbitalement équivalentes à l'odomètre. Pour cela, on prend $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ et on va trouver $T_0 \in [\mathcal{R}_T]$ tel que $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{T_0}$ et T_0 soit l'odomètre sur une partition de X .

Définition 2.28. L'algèbre engendrée par une échelle φ de hauteur n et de base B est l'algèbre $\mathcal{A}_\varphi$ engendrée par les boréliens $\varphi^k(B)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On va obtenir T_0 comme limite d'échelles $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

- (i) φ_{n+1} prolonge φ_n qui est une échelle de hauteur 2^{n_i} ,
- (ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\varphi_n)$ dense dans $\text{MAlg}(X, \mu)$.
- (iii) $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \in \mathcal{R}_{\varphi_n}\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc pour presque tout $x \in X$, $\text{Orb}_T(x) \subseteq \text{Orb}_{\lim \varphi_n}(x)$.

Commençons par le point (i).

Théorème 2.29. Soit $\mathcal{R}$ pmp ergodique, alors pour tout $A, B \in \text{MAlg}(X, \mu)$, si $\mu(A) = \mu(B)$, il existe $\varphi \in [[\mathcal{R}]]$ telle que $\varphi(A) = B$ à mesure nulle près.

Preuve. Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$. Soit $\Gamma = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de Γ . On va construire φ par récurrence. Soit $A_0 = \gamma_0^{-1}(B) \cap A$, $B_0 = \gamma_0(A_0)$. On pose $A_{n+1} = \gamma_{n+1}^{-1}(B \setminus \bigcup_{k=0}^n B_k) \cap (A \setminus \bigcup_{k=0}^n A_k)$ et $B_{n+1} = \gamma_{n+1}(A_{n+1})$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de boréliens disjoints et

$$\begin{aligned} \varphi : \bigcup A_n &\rightarrow \bigcup B_n \\ x &\mapsto \gamma_n(x) \text{ si } x \in A_n \end{aligned}$$

est une bijection partielle pmp de A sur B . En particulier, $\mu(A \setminus \bigcup A_n) = \mu(B \setminus \bigcup B_n)$. Supposons par l'absurde que $\mu(A \setminus \bigcup A_n) = \mu(B \setminus \bigcup B_n) > 0$. Par ergodicité de $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, si $\tilde{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n(A \setminus \text{img } \varphi)$, alors $\tilde{A}$ est Γ -invariant et contient $A \setminus \text{dom } \varphi$, donc $\mu(\tilde{A}) = 1$. Mais $\mu(B \setminus \text{img } \varphi) = \mu(A \setminus \text{dom } \varphi) > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\gamma_n(A \setminus \text{dom } \varphi) \cap (B \setminus \text{img } \varphi)) > 0$, ce qui contredit la construction de φ . $\square$

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de mesure dont les éléments sont des sous-ensembles mesurables de (X, μ) et $A \subseteq X$ est mesurable, on notera $A \in_\varepsilon \mathcal{A}$ s'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

Lemme 2.30. *Soit φ une échelle de hauteur k , $\varphi \in [[\mathcal{R}]]$ où $\mathcal{R}$ ergodique. Soit $A \in \text{MALg}(X, \mu)$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe $\psi \in [[\mathcal{R}]]$ une échelle de hauteur kn prolongeant φ et telle que $A \in_\varepsilon \mathcal{A}(\psi)$.*

Preuve. Soit B la base de φ , $\mathcal{P}$ la partition engendrée par $\{\varphi^{-i}(\varphi^i(B \cap A)) \mid i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}$. Soit $K = |\mathcal{P}|$ et $N > \frac{Kk\mu(B)}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq N$, on peut trouver une partition $(B_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ de B telle que pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P \in_{1/n} \text{Alg}(B_i, i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket)$ et $\mu(B_i) = \frac{\mu(B)}{n}$.

Par ergodicité et par le Théorème 2.29, on trouve pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ une bijection partielle $\psi_i : B_i \rightarrow B_{i+1}$ telle que $\psi_i \in [[\mathcal{R}]]$. On a alors une échelle $\psi \in [[\mathcal{R}]]$ de hauteur kn donnée par $\psi(x) = \varphi(x)$ si $x \in \text{dom } \varphi$ et si $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et $x \in \varphi^{n-1}(B_i)$, $\psi(x) = \psi_i \circ \varphi^{n-1}(x)$. Alors ψ convient et $A \in_\varepsilon \mathcal{A}(\psi)$. $\square$

Définition 2.31. Une relation $\mathcal{R}$ sur (X, μ) standard est *apériodique* si presque toutes ses classes sont infinies. $\mathcal{R}$ est *périodique* si toutes ses classes sont finies.

Définition 2.32. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur (X, μ) standard. Un borélien $D \subseteq X$ est un *domaine fondamental* pour $\mathcal{R}$ si pour presque tout $x \in X$, il existe un unique $y \in D$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Proposition 2.33. *Si $\mathcal{R}$ est périodique, il existe un domaine fondamental D pour $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ est apériodique, il n'existe pas de domaine fondamental pour $\mathcal{R}$.*

Preuve. On peut supposer $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Si $\mathcal{R}$ est périodique, posons $A = \{x_0 \in X \mid \forall x \in X, (x_0, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x_0 \leq x\}$ pour l'ordre usuel sur $[0, 1]$. Montrons que c'est un domaine fondamental pour $\mathcal{R}$. Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$. Alors $x_0 \in A$ si et seulement si pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot x_0 \geq x_0$. En particulier,

$$A = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{x_0 \mid x_0 \leq \gamma \cdot x_0\}$$

est borélien comme intersection dénombrable de boréliens. Donc A est un domaine fondamental pour $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ est apériodique, supposons par l'absurde qu'il existe un domaine fondamental D pour $\mathcal{R}$. Soit $\Gamma = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de Γ . On définit par récurrence une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'automorphismes partiels de X par

$$\varphi_n(x) = \gamma_i \cdot x \text{ où } i \text{ est minimal tel que } \gamma_i \cdot x \notin \{\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)\}$$

Alors $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \cdot D$, donc $\mu(D) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\text{dom}(\varphi_n)) = \mu(A) > 0$ donne $\mu(X) = +\infty$ ce qui est exclu. $\square$

Lemme 2.34 (Lemme des marqueurs). *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp apériodique sur (X, μ) standard. Alors il existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boréliens vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, $A_n \cap [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.*

Preuve. Sans perte de généralité, $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $A_n = \{x \in X \mid x < \inf_{n \in \mathbb{N}} [x]_{\mathcal{R}} + 2^{-n}\}$. Alors A_n est borélien et pour tout $x \in X$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap [x]_{\mathcal{R}}$ contient au plus un point qui serait le minimum de $[x]_{\mathcal{R}}$. Soit $B = \{x \in X \mid [x]_{\mathcal{R}} \text{ admet un minimum}\}$. Si $\mu(B) > 0$, alors $\mathcal{R}|_B$ a un domaine fondamental qui est l'ensemble des minimums des $\mathcal{R}|_B$ -classes, mais B est $\mathcal{R}$ -invariant, donc $\mathcal{R}|_B$ est apériodique, ce qui contredit la proposition précédente. Donc $\mu(B) = 0$ et en remplaçant A_n par $A_n \setminus B$, on obtient la suite de boréliens souhaitée. $\square$

On rappelle le théorème de récurrence classique de Poincaré.

Théorème 2.35. *Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, $A \subseteq X$ mesurable de mesure strictement positive. Alors pour presque tout $x \in A$, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n(x) \in A$.*

Preuve. Soit $B = A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(B) \subseteq T^{-n}(A)$ donc pour tout $m \neq n$, $T^{-m}(B) \cap T^{-n}(B) = \emptyset$, or T préserve la mesure et $\mu(X) = 1$, donc $\mu(B) = 0$. $\square$

Lemme 2.36 (Lemme de Rokhlin). *Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ tel que $\mathcal{R}_T$ est apériodique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A \subseteq X$ mesurable tel que les ensembles $A, T(A), \dots, T^{n-1}(A)$ sont disjoints et $\mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(A)) > 1 - \varepsilon$.*

Preuve. Par apériodicité, on trouve A borélien tel que pour presque tout x , $\text{Orb}_T(x) \cap A \neq \emptyset$ et $\mu(A) < \varepsilon/N$. Pour tout $x \in X$, on pose

$$n_A(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid T^n(x) \in A\}.$$

Alors pour presque tout $x \in X$, $n_A(x)$ est fini. Soit $A_n = \{x \in X \mid n_A(x) = n\}$, alors à mesure nulle près, $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(A_n)$. Soit $B = \bigsqcup_{n \geq N} \bigsqcup_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \leq n-N}} T^k(A_n)$. Alors par construction, les ensembles

$B, T(B), \dots, T^{N-1}(B)$ sont disjoints et $X \setminus \bigcup_{k=0}^{N-1} T^k(B) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i=n-N+1}^{n-1} T^i(A_n)$, donc

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} T^k(B)\right) > 1 - \varepsilon.$$

$\square$

On va maintenant se servir du Lemme 2.36 pour prouver le point (ii) de la stratégie de preuve du théorème de Dye.

Proposition 2.37. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp ergodique sur (X, μ) standard et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\psi \in [[\mathcal{R}_T]]$ une échelle telle que $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_\psi\}) < \varepsilon$.*

Preuve. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon/2$. Par le Lemme 2.36, il existe $A \subseteq X$ mesurable tel que les ensembles $A, T(A), \dots, T^{N-1}(A)$ sont disjoints et $\mu(\bigcup_{k=0}^{N-1} T^k(A)) > 1 - \varepsilon/2$. Alors $\mu(A) < \frac{1}{N}$. Soit

$C = X \setminus \bigcup_{k=0}^{N-1} T^k(A)$ et $C_0, \dots, C_{N-1}$ tels que $\mu(C_0) = \dots = \mu(C_{N-1})$ et $C = \bigsqcup_{k=0}^{N-1} C_k$. Par le Théorème 2.29, il existe $\varphi \in [[\mathcal{R}]]$ telle que $\varphi(C_k) = T^k(A)$ pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Alors

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in C \\ T(x) & \text{si } x \in \bigcup_{k=0}^{N-1} T^k(A) \end{cases}$$

est comme voulue : $\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_\psi\} \subseteq C \cup T^{N-1}(A)$ qui est de mesure plus petite que ε . $\square$

Si (A_n) est une suite dense dans $\text{MAlg}(X, \mu)$, on peut construire par récurrence une suite d'échelles (φ_n) de hauteur 2^{n_i} telle que φ_{n+1} prolonge φ_n et

- (i) $A_n \in_{2^{-n}} \mathcal{A}(\varphi_n)$
- (ii) $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_{\varphi_n}\}) < 2^{-n}$.

La condition (i) découle du Lemme 2.30 et la condition (ii) viendra d'une conséquence de la proposition précédente, énoncée sous forme du Lemme suivant.

Lemme 2.38. *Soit $\varphi \in [[\mathcal{R}_T]]$ une échelle de hauteur k et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\psi \in [[\mathcal{R}_T]]$ une échelle de hauteur kn prolongeant φ telle que $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_\psi\}) < \varepsilon$.*

Preuve. Soit B la base de φ et pour tout $x \in B$,

$$n(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid T^n(x) \in B\},$$

qui est bien défini pour presque tout x . Posons pour tout x vérifiant $n(x) < \infty$, $T_B(x) = T^{n(x)}(x)$ la restriction de la dynamique de T à l'ensemble B , alors $T_B \in \text{Aut}(B, \mu|_B)$ et $\mathcal{R}_{T_B} = \mathcal{R}_{T|_B}$.

D'après la Proposition 2.37, il existe $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'échelles de hauteur 2^{m+1} prolongeant φ telle que

$$\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_{\psi_m}\}) < 2^{-m}.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, pour μ_B presque tout x , il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, $(x, T(x)) \in \mathcal{R}_{\psi_m}$. Soit $\tilde{\psi}_m$ l'échelle de hauteur $k2^m$ obtenue à partir de φ et ψ_m . Alors pour presque tout $x \in X$, il existe $i, j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ tels que $\varphi^{-i}(x) \in B$ et $\varphi^{-j}(T(x)) \in B$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$, $(\varphi^{-i}(x), \varphi^{-j}(T(x))) \in \mathcal{R}_{\tilde{\psi}_m}$ et pour μ_B presque tout x , pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$, $(x, T_B^\ell(x)) \in \mathcal{R}_{\psi_m}$.

Alors pour tout N assez grand, $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \mathcal{R}_{\psi_N}\}) < \varepsilon$. $\square$

Ceci conclut la démonstration du point (ii) et la construction de la suite d'échelles (φ_n) , le Théorème de Dye suit.

Les actions de $\mathbb{Z}$ décrivent également la classe de relations d'équivalence suivante.

Définition 2.39. Une relation d'équivalence pmp $\mathcal{R}$ sur (X, μ) standard est dite μ -hyperfinie si quitte à restreindre à un borélien invariant de mesure 1, elle est la réunion croissante d'une suite de relations d'équivalence pmp $\mathcal{R}_n$ dont toutes les classes sont finies.

Exemple 2.40. Si T_0 est l'odomètre, alors $\mathcal{R}_{T_0}$ est hyperfinie :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{T_0} &= \{((x_n), (y_n)) \mid \exists N, \forall n \geq N, x_n = y_n\} \\ &= \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{((x_n), (y_n)) \mid \forall n \geq N, x_n = y_n\}.\end{aligned}$$

Proposition 2.41. Soit $\mathcal{R}$ pmp. Alors $\mathcal{R}$ est μ -hyperfinie ssi il existe une action $\mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu)$ telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu)}$.

2.5 Actions de groupes moyennables

Dans cette section, on s'intéresse aux actions de groupes moyennables. Le résultat principal est le suivant : deux actions pmp ergodiques de groupes moyennables sont orbitalement équivalentes.

Définition 2.42. Un groupe Γ est moyennable si pour tout $S \subseteq \Gamma$ fini et $\varepsilon > 0$, il existe $F \subseteq \Gamma$ fini tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\frac{|\gamma F \Delta F|}{|F|} < \varepsilon.$$

(Condition de Følner)

Exemple 2.43. Tout groupe localement fini (i.e. $\forall S \subseteq \Gamma$ fini, $\langle S \rangle$ est fini) est moyennable. En particulier, le groupe des permutations de $\mathbb{N}$ de support fini est moyennable.

Proposition 2.44. Si Γ est engendré par une sous-partie finie S , alors Γ est moyennable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subseteq \Gamma$ fini tel que pour tout $\gamma \in S$,

$$\frac{|\gamma F \Delta F|}{|F|} < \varepsilon.$$

Preuve. Le sens direct est clair, pour le sens réciproque, on observe que l'on a sur les parties de Γ une distance invariante par l'action à gauche de Γ définie pour tout $A, B \subseteq \Gamma$ finis :

$$d(A, B) = |A \Delta B|.$$

Soit $\gamma \in \Gamma$, $s_0 = e_\Gamma$, $s_1, \dots, s_n \in S$ tels que $\gamma = s_1 \dots s_n$. Si $F \subseteq \Gamma$ satisfait pour tout $s \in S$, $d(sF, F) < \frac{\varepsilon|F|}{n}$, alors $d(\gamma F, F) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(s_1 \dots s_i F, s_1 \dots s_{i+1} F) \leq \varepsilon|F|$. $\square$

Exemple 2.45. $\mathbb{Z}$ est moyennable : $F_n = \llbracket -n, n \rrbracket$ donne

$$\frac{|\pm 1 \cdot F_n \Delta F_n|}{|F_n|} = \frac{2}{2n+1}.$$

On peut montrer que les produits finis de groupes moyennables ainsi que leurs réunions croissantes sont moyennables. En particulier, les groupes abéliens dénombrables sont moyennables. La moyennabilité est également stable par sous-groupe, quotient, extension et limites inductives. Un groupe obtenu à partir de ces opérations sur des groupes finis et abéliens est dit *élémentairement moyennable*.

Proposition 2.46. *Les groupes résolubles sont élémentairement moyennables.*

Preuve. Soit Γ moyennable, $\{e_\Gamma\} = \Gamma_0 \trianglelefteq \Gamma_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \Gamma_k = \Gamma$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, Γ_i/Γ_{i-1} est abélien. $\Gamma_0, \Gamma_1/\Gamma_0 \simeq \Gamma_1$ sont moyennables et Γ_2/Γ_1 est abélien donc moyennable. Puisque la moyennabilité est stable par extension, Γ_2 est moyennable et de proche en proche, Γ est moyennable. $\square$

Le principal exemple de groupe non moyennable est le suivant.

Proposition 2.47. *Le groupe libre $\mathbb{F}_n$ n'est pas moyennable.*

Preuve. On montre le résultat pour $\mathbb{F}_2$. D'après la proposition 2.44, il est facile de voir qu'un groupe Γ est moyennable si et seulement s'il existe une suite $(F_n)_n$ de parties finies de Γ telles que pour tout $s \in S$, $\frac{|sF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $S = S^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ est moyennable} &\iff \exists (F_n)_n \text{ tel que } \forall s \in S, \frac{|sF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff \exists (F_n)_n \text{ tel que } \forall s \in S, \frac{|sF_n \setminus F_n|}{|F_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff \exists (F_n)_n \text{ tel que } \forall s \in S, \frac{|\partial F_n|}{|F_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

où $\partial F_2 = \left(\bigcup_{s \in S} sF \right) \setminus F$ peut être vu comme la frontière de F dans l'ensemble des sommets du graphe de Cayley de $\mathbb{F} = \langle a, b \rangle$. Or dans un arbre d -régulier infini, chaque sous-arbre F vérifie $\partial F = \sum_{v \in F} d - \sum_{v \in F} \deg_F(v) = d|F| - 2(|F| - 1) = (d - 2)|F| + 2$, donc $\frac{|\partial F_n|}{|F_n|}$ ne peut pas tendre vers 0. Le cas où les F_n ne sont pas connexes s'en déduit. $\square$

Question 1. (Day-von Neumann) A-t-on Γ non moyennable $\iff \mathbb{F}_2 \leq \Gamma$?

À laquelle Ol'shanskii a répondu négativement en 1980. On a cependant le résultat suivant dû à Gaboriau et Lyons dans le cadre mesurable.

Théorème 2.48. [GL09] *Un groupe dénombrable Γ est non moyennable si et seulement s'il existe une action pmp essentiellement libre $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ telle que $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)} \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright (X, \mu)}$.*

On a la caractérisation suivante de la moyennabilité en terme de mesures de probabilités quasi-invariantes.

Théorème 2.49 (Reiter). Γ est moyennable $\iff$ il existe une suite $(f_n)_n$ de mesures de probabilités sur Γ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\|\gamma \cdot f_n - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

De manière similaire, il est possible de définir la moyennabilité d'une relation d'équivalence dénombrable.

Définition 2.50. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur X borélien standard. $\mathcal{R}$ est dite *moyennable* s'il existe une suite $\lambda_n : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ telles que

- (i) $\forall x \in X, \lambda_n(x, \cdot) : [x]_{\mathcal{R}} \rightarrow [0, 1]$ est une mesure de proba.
- (ii) $\forall x, z \in X, \|\lambda_n(x, \cdot) - \lambda_n(z, \cdot)\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Par exemple, la relation d'équivalence orbitale induite par l'action de Γ moyennable sur X borélien standard est moyennable.

Il est possible de modifier cette définition pour demander la moyennabilité sur un ensemble invariant de mesure pleine.

Définition 2.51. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur (X, μ) borélien standard. $\mathcal{R}$ est dite μ -moyennable s'il existe $X' \subseteq X$ un borélien $\mathcal{R}$ -invariant de mesure pleine tel que la restriction $\mathcal{R}|_{X'}$ est moyennable.

Les actions pmp ergodiques de groupes moyennables sont toutes similaires du point de vue de l'équivalence orbitale :

Théorème 2.52 (Connes, Feldman, Weiss [CFW81]). Si une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ borélienne dénombrable sur (X, μ) est μ -moyennable, alors elle est μ -hyperfinie.

En combinant ce résultat au Théorème 2.26, on a la conséquence suivante.

Corollaire 2.53. Soient Γ, Λ moyennables, $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ pmp ergodiques, alors $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright (X, \mu)}$ et $\mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright (X, \mu)}$ sont orbitalement équivalentes.

2.6 Groupe d'automorphisme d'un espace de probabilité standard

Dans la suite, on note $L^2(X, \mu) = L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes de carré intégrable. On va maintenant parler de deux topologies fondamentales sur $\text{Aut}(X, \mu)$: la topologie faible et la topologie uniforme.

2.6.1 Topologie faible

C'est la plus petite topologie rendant les applications

$$T \mapsto T(A), \quad A \in \text{MAlg}(X, \mu),$$

continues. Pour cette topologie, notée w , le groupe $(\text{Aut}(X, \mu), w)$ est un groupe topologique polonais. Une métrique invariante à gauche compatible est donnée par

$$\delta_w(S, T) = \sum_n 2^{-n} \mu(S(A_n) \Delta T(A_n)),$$

où $\{A_n\}$ est un ensemble dense de $\text{MAlg}(X, \mu)$ (par exemple une algèbre engendrant les boréliens de X), et une métrique complète compatible par

$$\bar{\delta}_w(S, T) = \delta_w(S, T) + \delta_w(S^{-1}, T^{-1}).$$

On peut également voir $\text{Aut}(X, \mu)$ comme le groupe des automorphismes de l'algèbre de mesure $\text{MAlg}(X, \mu)$ muni de la topologie de convergence ponctuelle, ou encore comme un sous-groupe fermé du groupe des isométries $\text{Iso}(\text{MAlg}(X, \mu), d_\mu)$ muni de la topologie de convergence ponctuelle.

On identifie $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ à l'opérateur unitaire sur $L^2(X, \mu)$ défini par

$$U_T(f) = f \circ T^{-1}.$$

L'application $T \mapsto U_T$ est appelée la représentation de Koopman. Avec cette identification, $\text{Aut}(X, \mu)$ est exactement le groupe des opérateurs unitaires U vérifiant pour $f, g \in L^2(X, \mu)$

$$U(fg) = U(f)U(g).$$

Il coïncide également avec les opérateurs unitaires tels que

$$f \geq 0 \Rightarrow U(f) \geq 0, \quad U(1) = 1.$$

On définit

$$L_0^2(X, \mu) = \left\{ f \in L^2(X, \mu) : \int f d\mu = 0 \right\},$$

l'orthogonal des fonctions constantes $C = \mathbb{C}1$. L'espace $L_0^2(X, \mu)$ est invariant par U_T , et U_T agit trivialement sur les constantes. On peut donc identifier T à la restriction U_T^0 sur $L_0^2(X, \mu)$.

Enfin, décrivons des bases explicites d'ouverts pour la topologie faible w . Les ensembles

$$V_{S, A_1, \dots, A_n, \varepsilon} = \{T : \forall i \leq n, \mu(T(A_i) \Delta S(A_i)) < \varepsilon\},$$

où $A_1, \dots, A_n \in \text{MAlg}(X, \mu)$, $\varepsilon > 0$, $S \in \text{Aut}(X, \mu)$, forment une base d'ouverts pour w . De même, les ensembles

$$W_{S, A_1, \dots, A_n, \varepsilon} = \{T : \forall i, j \leq n, |\mu(S(A_i) \cap A_j) - \mu(T(A_i) \cap A_j)| < \varepsilon\},$$

forment également une base de w . L'identification avec le groupe unitaire permet de voir cela via les produits scalaires

$$\langle U_T \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \rangle = \mu(T(A) \cap B).$$

2.6.2 Topologie uniforme

Notée u , elle est définie par la métrique

$$\delta'_u(S, T) = \sup_{A \in \text{MAlg}(X, \mu)} \mu(S(A) \Delta T(A)).$$

C'est une métrique complète bi-invariante sur $\text{Aut}(X, \mu)$, mais elle n'est pas séparable (par exemple, les rotations S_α du cercle forment un sous-ensemble discret). On a clairement $w \subsetneq u$. Une métrique équivalente est donnée par

$$\delta_u(S, T) = \mu(\{x : S(x) \neq T(x)\}).$$

On a en fait les inégalités

$$\frac{2}{3}\delta_u \leq \delta'_u \leq \delta_u.$$

La métrique δ_u est bi-invariante. Pour $T : X \rightarrow X$, on définit

$$\text{supp}(T) = \{x \mid T(x) \neq x\}.$$

Alors

$$\delta_u(T, 1) = \mu(\text{supp}(T)).$$

Proposition 2.54. *Chaque boule fermée pour δ'_u est fermée dans w , donc chaque boule ouverte est F_σ (union dénombrable de fermés) dans w .*

Preuve. Pour voir cela, notons que pour tout $T_0 \in \text{Aut}(X, \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, la boule

$$\{T \mid \delta'_u(T_0, T) \leq \varepsilon\}$$

coïncide avec l'ensemble des T satisfaisant

$$\forall A \in \text{MAlg}(X, \mu), \quad d_\mu(T(A), T_0(A)) \leq \varepsilon.$$

De même, toute boule fermée pour δ_u est fermée dans la topologie w . Pour le voir, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{T : \delta_u(T, 1) > \varepsilon\}$ est ouvert pour w . Fixons T tel que $\delta_u(T, 1) > \varepsilon$. On peut alors trouver des ensembles boréliens deux à deux disjoints $A_1, \dots, A_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > \varepsilon \quad \text{et} \quad T(A_i) \cap A_i = \emptyset, \quad \forall i \leq n.$$

Fixons

$$\delta < \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \varepsilon \right).$$

Alors si $\mu(S(A_i) \Delta T(A_i)) < \delta$, $\forall i \leq n$, on a

$$\mu(S(A_i) \Delta A_i) \geq \mu(T(A_i) \Delta A_i) - \mu(S(A_i) \Delta T(A_i)) > 2\mu(A_i) - \delta,$$

d'où

$$\mu(A_i \setminus S(A_i)) > \mu(A_i) - \delta, \quad \forall i \leq n.$$

Et finalement,

$$\delta_u(S, 1) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i \setminus S(A_i)) > \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - n\delta > \varepsilon.$$

On en déduit que δ_u et δ'_u sont semi-continues inférieurement sur l'espace $(\text{Aut}(X, \mu), w)$.
Observons enfin que des calculs similaires montrent que l'application

$$T \mapsto \text{supp}(T)$$

$$\text{Aut}(X, \mu) \longrightarrow \text{MAlg}(X, \mu)$$

est continue pour la topologie uniforme u et de classe de Baire 1 (*i.e.* limite simple de fonctions continues) pour la topologie faible w .

Ceci est clair pour u . Pour la topologie faible, il suffit de montrer que pour tout $A \in \text{MAlg}(X, \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$F = \{T : \mu(\text{supp}(T) \Delta A) < \varepsilon\}$$

est un F_σ .

On remarque que

$$T \in F \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \alpha + \beta < \varepsilon,$$

tels que

$$\mu(\{x \notin A : T(x) \neq x\}) \leq \alpha \quad \text{et} \quad \mu(\{x \in A : T(x) = x\}) < \beta.$$

L'argument précédent montre aussi que pour tout $\gamma > 0$ et tout $B \in \text{MAlg}(X, \mu)$, l'ensemble

$$\{T : \mu(\{x \in B : T(x) \neq x\}) > \gamma\}$$

est ouvert pour w .

Il en découle que

$$\{T : \mu(\{x \notin A : T(x) \neq x\}) \leq \alpha\}$$

est fermé dans w , et comme

$$\mu(\{x \in A : T(x) = x\}) = \mu(A) - \mu(\{x \in A : T(x) \neq x\}),$$

l'ensemble

$$\{T : \mu(\{x \in A : T(x) = x\}) < \beta\}$$

est ouvert dans w , donc F est un ensemble F_σ pour la topologie w . □

2.7 Quelques propriétés du groupe plein

Soit (X, μ) un espace de mesure standard et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X . Pour toute relation borélienne $\mathcal{R}$, on rappelle que son groupe plein $[\mathcal{R}]$ est :

$$[\mathcal{R}] = \{T \in \text{Aut}(X, \mu) : T(x) \mathcal{R} x \text{ } \mu\text{-presque partout}\}.$$

Il est facile de vérifier que $[\mathcal{R}]$ est un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(X, \mu)$ pour la topologie uniforme. Une propriété importante du groupe plein est le théorème suivant dû à Dye : la structure du groupe plein en tant que groupe topologique encode la relation d'équivalence ergodique $\mathcal{R}$.

Théorème 2.55 (Reconstruction de Dye, [Dye63]). *Soient $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ deux relations d'équivalences ergodiques. Alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont isomorphes si et seulement si $[\mathcal{R}]$ et $[\mathcal{S}]$ sont isomorphes en tant que groupes topologiques.*

On a également le résultat suivant, voir [Kec10, Thm. 4.6].

Théorème 2.56. *Si $\mathcal{R}$ est ergodique, alors $[\mathcal{R}]$ est un groupe simple.*

Preuve. Soit $N \trianglelefteq [\mathcal{R}]$ un sous-groupe distingué non trivial. Commençons par remarquer le fait général suivant. Soient G un groupe et $N \trianglelefteq G$. Si H est une partie génératrice de G telle que $[H, H] \subseteq N$, alors $[G, G] \subseteq N$. En effet, si $\pi : G \rightarrow G/N$ désigne la projection canonique, tous les éléments de $\pi(H)$ commutent deux à deux. Comme $\pi(H)$ engendre $\pi(G)$, le quotient $\pi(G)$ est abélien. Il s'ensuit que $[G, G] \subseteq N$.

Remarquons ensuite que, pour tout $\varepsilon > 0$, les éléments

$$T \in [\mathcal{R}] \quad \text{tels que} \quad \delta_u(T, 1) < \varepsilon$$

engendrent $[\mathcal{R}]$. Cela découle immédiatement du fait que toute involution de $[\mathcal{R}]$ est produit d'involutions dont le support peut être choisi arbitrairement petit, voir [Kec10, Lem. 4.5].

Fixons maintenant un élément non trivial $T_0 \in N$. Il existe alors un ensemble mesurable A de mesure strictement positive tel que $T_0(A) \cap A = \emptyset$. Posons $\varepsilon = \frac{\mu(A)}{2}$. Nous allons montrer que le commutateur de deux éléments quelconques de $[\mathcal{R}]$ dont le support est suffisamment petit appartient à N . Soient donc $S, T \in [\mathcal{R}]$ tels que

$$\delta_u(S, 1) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta_u(T, 1) < \varepsilon.$$

Quitte à les conjuguer, on peut supposer que leurs supports sont contenus dans A . Les supports de S^{-1} et de $T_0 T^{-1} T_0^{-1}$ sont alors disjoints, ces deux éléments commutent donc.

Soit $\widehat{T} = (T T_0 T^{-1}) T_0^{-1} \in N$, On obtient alors

$$\begin{aligned} [S, T] &= S T S^{-1} T^{-1} \\ &= S T (T_0 T^{-1} T_0^{-1}) S^{-1} (T_0 T T_0^{-1} T^{-1}) \\ &= S (T T_0 T^{-1} T_0^{-1}) S^{-1} (T_0 T T_0^{-1} T^{-1}) \\ &= S \widehat{T} S^{-1} \widehat{T}^{-1}, \end{aligned}$$

qui appartient à N , puisque $\widehat{T} \in N$ et que N est distingué, donc $[\mathcal{R}] = N$ □

Proposition 2.57. $\mathcal{R}$ est ergodique si et seulement si $[\mathcal{R}]$ est dense dans $(\text{Aut}(X, \mu), w)$.

Preuve. Supposons $\mathcal{R}$ ergodique. Si A, B sont deux ensembles boréliens de même mesure, il existe $T \in [\mathcal{R}]$ tel que $T(A) = B$. Soit maintenant $S \in \text{Aut}(X, \mu)$. Une base de voisinages de S est donnée par les ensembles de la forme

$$\{T : \forall i \leq n, d_\mu(T(A_i), S(A_i)) < \varepsilon\},$$

où $\varepsilon > 0$ et $A_1, \dots, A_n$ est une partition borélienne de X . On choisit alors $T_1, \dots, T_n \in [\mathcal{R}]$ tels que $T_i(A_i) = S(A_i)$. En posant

$$T = \sum_{i \leq n} T_i|_{A_i},$$

on obtient $T \in [\mathcal{R}]$ et clairement $T(A_i) = S(A_i)$ pour tout i . Réciproquement, si $\mathcal{R}$ n'est pas ergodique, il existe $A \in \text{MAlg}(X, \mu)$ tel que $0 < \mu(A) < 1$ et A est $[\mathcal{R}]$ -invariant. Si $[\mathcal{R}]$ était dense dans $\text{Aut}(X, \mu)$ pour la topologie faible, alors A serait invariant par tout $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, ce qui est absurde. $\square$

En fait $[\mathcal{R}]$ est fermé pour w si et seulement si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence finie, cf [Wei05].

On observe maintenant un fait fondamental concernant la topologie uniforme de $[\mathcal{R}]$.

Proposition 2.58. Pour la topologie uniforme, $[\mathcal{R}]$ est séparable, donc $([\mathcal{R}], u)$ est un groupe polonais.

Preuve. Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dénombrable, il existe un groupe dénombrable $\Gamma \leq \text{Aut}(X, \mu)$ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\Gamma^X$. Ainsi, $T \in [\mathcal{R}]$ si et seulement s'il existe une partition borélienne (A_n) de X et une suite $(\gamma_n) \subset \Gamma$ telles que $T|_{A_n} = \gamma_n|_{A_n}$. Fixons également une algèbre de Boole dénombrable $\mathcal{A}$ de boréliens, stable par Γ , et dense dans l'algèbre de mesure. À partir de données finies $C_1, \dots, C_N \in \mathcal{A}$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \Gamma$, supposées telles que les C_i soient disjoints et les $\gamma_i(C_i)$ disjoints, on construit une approximation $S_{\vec{C}, \vec{\gamma}}$ de T . On montre alors que toute transformation $T \in [\mathcal{R}]$ peut être approchée arbitrairement bien pour la métrique uniforme par une famille dénombrable d'éléments de ce type, ce qui implique la séparabilité. $\square$

L'identité induit une application continue de $([\mathcal{R}], u)$ vers $[\mathcal{R}] \subset (\text{Aut}(X, \mu), w)$, ce qui montre que $[\mathcal{R}]$ peut être muni d'une topologie polonaise dans $(\text{Aut}(X, \mu), w)$ celle-ci étant précisément la topologie uniforme.

Théorème 2.59 (Approximation périodique). Si $T \in [\mathcal{R}]$ est apériodique, alors pour tout $N \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une transformation périodique $S \in [\mathcal{R}]$ de période N telle que

$$\delta_u(S, T) \leq \frac{1}{N} + \varepsilon.$$

3 Sous-groupes discrets d'un groupe plein

Dans cette section, on présente une première partie de l'article [ACTT] à l'origine du sujet de stage.

3.1 Actions discrètes

Soit Γ un groupe infini dénombrable et $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp ergodique sur un espace de probabilité standard (X, μ) et $G = [\Gamma \curvearrowright (X, \mu)]$ le groupe plein de la relation d'équivalence orbitale associée. Pour tout $g \in G$, on définit son support

$$S(g) := \{x \in X \mid gx \neq x\}.$$

En particulier, $S(g) = S(g^{-1})$ et pour tout $h \in G$, on a $S(ghg^{-1}) = gS(h)$. Le groupe G est alors équipé d'une fonction longueur $\ell(g) := \mu(S(g))$ invariante par conjugaison et d'une métrique bi-invariante $d(g, h) := \ell(gh^{-1})$. Pour tout sous-groupe Λ de G , on appelle *module de discrétion* de Λ et on note

$$\delta(\Lambda) := \inf\{\ell(g) \mid g \in \Lambda \setminus \{e_\Lambda\}\}.$$

Pour $\delta > 0$, on dit que Λ est δ -discret si $\delta(\Lambda) \geq \delta$. Une action 1-discrète est dite *essentiellement libre*, et $\delta(\Lambda) > 0$ si et seulement si Λ est un sous-groupe discret de G .

Exemple 3.1. (i) Pour un groupe dénombrable Γ , l'action donnée par le décalage de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright \left(\{0, 1\}^\Gamma, \left(\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)\right)^{\otimes \Gamma}\right)$ est essentiellement libre (mais non libre).
(ii) Étant donné $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $n \cdot x = x + n\alpha$ est essentiellement libre.
(iii) Soit $\Gamma = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, prenons une partition de $[0, 1]$ en intervalles A_n tel que $\mu(A_n) = 2^{-n}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'élément non trivial de la copie associée de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit en renversant l'intervalle A_n et laisse invariant $I \setminus A_n$. Cette action n'est pas discrète : on a une suite d'éléments $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\ell(g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Définition 3.2. On dit que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est *maximale discrète* s'il n'y a pas de sous-groupe discret non-trivial $\Lambda \leq G$ qui contient strictement Γ .

Il est alors naturel de se demander si G contient des sous-groupes admettant une action maximale discrète ou si un sous-groupe donné est maximal discret. Les résultats donnés dans [ACTT] donnent des conditions sur le groupe Γ engendrant la relation d'équivalence qui l'empêchent d'être maximal discret ainsi que des minoration du module de discrétion de Γ pour certains types d'actions discrètes.

Avant de prouver ces résultats, nous terminons cette partie par quelques préliminaires sur les actions discrètes.

Pour tous $g, h \in \Gamma$, on note $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$.

Lemme 3.3. Soit $\Gamma \curvearrowright X$ une action d'un groupe sur un ensemble X . Soient $g, h \in \Gamma$ et posons $A_{g,h} = S(g) \cap S(h)$. Alors on a

$$S([g, h]) \subseteq A_{g,h} \cup gA_{g,h} \cup hA_{g,h}.$$

De plus, si μ est une mesure de probabilité Γ -invariante sur X , alors

$$\mu(S([g, h])) \leq 3\mu(A_{g,h}) - \mu(gA_{g,h} \cap A_{g,h}) - \mu(hA_{g,h} \cap A_{g,h}).$$

Preuve. Supposons que $x \in S([g, h])$, c'est-à-dire que $ghg^{-1}h^{-1}x \neq x$. Alors

$$x \in S(g) \cup S(h) = (S(g) \cap S(h)) \cup (S(g) \setminus S(h)) \cup (S(h) \setminus S(g)).$$

Si $x \in S(g) \cap S(h)$, c'est terminé, pour les deux autres cas :

- (1) $x \in S(g) \setminus S(h)$: alors $x \neq ghg^{-1}h^{-1}x = ghg^{-1}x$, donc $x \in S(ghg^{-1})$, et par conséquent $x \in S(g) \cap S(ghg^{-1}) = g(S(g) \cap S(h))$.
- (2) $x \in S(h) \setminus S(g)$: ce cas est symétrique au cas (1) en échangeant les rôles de g et h , donc $x \in h(S(g) \cap S(h))$.

Remarquons que $A_{g,h} \subseteq gA_{g,h} \cap hA_{g,h}$, alors

$$\begin{aligned} \ell([g, h]) &\leq \mu(A_{g,h}) + \mu(gA_{g,h} \cup hA_{g,h}) - \mu(A_{g,h} \cap gA_{g,h} \cup A_{g,h} \cap hA_{g,h}) \\ &= 3\mu(A_{g,h}) - \mu(A_{g,h} \cap gA_{g,h}) - \mu(A_{g,h} \cap hA_{g,h}) \\ &\quad - \mu(gA_{g,h} \cap hA_{g,h}) + \mu(A_{g,h} \cap gA_{g,h} \cap hA_{g,h}) \\ &= 3\mu(A_{g,h}) - \mu(A_{g,h} \cap gA_{g,h}) - \mu(A_{g,h} \cap hA_{g,h}). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. Soient $1 \geq c > 0$ et $1 \geq \varepsilon > 0$ donnés, et soit n un entier tel que $n > \frac{1-c}{c\varepsilon} + 1$. Soit (Y, ν) un espace de probabilité, $a \geq c$, et supposons que $A_0, \dots, A_{n-1}$ sont des sous-ensembles mesurables de Y de mesure a . Alors il existe $0 \leq i, j < n$ distincts tels que

$$\nu(A_i \cap A_j) > a^2(1 - \varepsilon).$$

En particulier, si $T : (Y, \nu) \rightarrow (Y, \nu)$ est une transformation inversible préservant la mesure et $A \subseteq Y$ est mesurable avec $\nu(A) \geq c$, alors il existe $1 \leq j < n$ tel que

$$\nu(T^j A \cap A) > \nu(A)^2(1 - \varepsilon).$$

Preuve. Supposons à l'inverse que $\nu(A_i \cap A_j) \leq a^2(1 - \varepsilon)$ pour tous $i \neq j$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$n^2 a^2 = \left(\int \sum_{i < n} \mathbf{1}_{A_i} d\nu \right)^2 \leq \int \left(\sum_{i < n} \mathbf{1}_{A_i} \right)^2 d\nu = na + n(n-1)a^2(1 - \varepsilon).$$

On obtient $n \leq \frac{1-a}{a\varepsilon} + 1 \leq \frac{1-c}{c\varepsilon} + 1$, ce qui contredit l'hypothèse sur n .

□

3.2 Groupes sans identité mixte

3.2.1 Résultats principaux

Les premiers résultats concernent les groupes dits *sans identité mixte*, *Mixed Identity Free* ou *MIF* en anglais. Un groupe est *MIF* s'il n'y a pas de mot $w \in \Gamma * \mathbb{Z}$ tel que l'application associée $w : \Gamma \rightarrow \Gamma$, donnée par l'évaluation de l'indéterminée sur Γ , soit constante égale à e_Γ .

Les groupes abéliens vérifient l'identité mixte non triviale $[a, x] = 0$. Des exemples de groupes MIF incluent les groupes libres, $PSL_n(\mathbb{Z})$ et plus généralement les groupes acylindriquement hyperboliques par un résultat de Hull et Osin [HO15] (Si un groupe Γ agit isométriquement sur un espace hyperbolique et géodésique (X, d) son action est *acylindriquement hyperbolique* si pour tout $R > 0$, il existe $N, L > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) > L \Rightarrow |\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x), d(y, \gamma y) < R\}| \leq N$). De manière générale, les groupes MIF satisfont des contraintes structurelles assez strictes, par exemple ils ne se décomposent pas en produit direct : un produit de groupes non triviaux $A \times B$ satisfait $[[x, a], b] = 1$, pour tout $a \in A \setminus \{e_A\}$, $b \in B \setminus \{e_B\}$.

Théorème 3.5. ([ACTT, Thm 1.1]) *Soit Γ un groupe discret infini et $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action pmp ergodique fidèle sur (X, μ) un espace de probabilité standard, tel qu'au moins une des conditions suivante est satisfaite :*

- (i) Γ est MIF et α est faiblement mélangeante, essentiellement libre.
- (ii) Γ est sans torsion et α est mélangeante.

Si $g \in G$ est tel que $\ell(g) < 1/3$, alors le groupe $\langle \Gamma, g \rangle$ n'est pas discret, en particulier Γ est contenu dans un sous-groupe maximal discret.

On a le résultat suivant concernant la relation d'équivalence hyperfinie.

Théorème 3.6. ([Jac19, Thm 1.2]) *Il existe un groupe élémentairement moyennable MIF généré par deux éléments.*

En conséquence, le groupe plein $[\mathcal{R}_{\text{hyp}}]$ de la relation hyperfinie admet un sous-groupe discret maximal. Nous montrerons qu'en fait $[\mathcal{R}_{\text{hyp}}]$ contient deux copies discrètes du groupe décrit dans le Théorème 3.6 : l'une contenue dans un sous-groupe discret maximal, l'autre dans une tour de sous-groupes de $[\mathcal{R}_{\text{hyp}}]$ d'union dense.

Le second résultat sur les groupes MIF donne une minoration de $\delta(\Gamma)$ lorsque l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est discrète.

Théorème 3.7. *Soit Γ un groupe MIF et $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action fidèle ergodique pmp. Si Γ est discret, alors il est $\frac{1}{2}$ -discret.*

Dans le reste de cette section sur les groupes MIF, nous présentons quelques résultats généraux sur les actions de groupes mélangeantes avant de les utiliser pour prouver les Théorèmes 3.5 et 3.7.

3.2.2 Actions faiblement mélangeantes

On commence par prouver la première partie du Théorème 3.5. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.8. *Soit Γ un groupe. Supposons qu'il existe $w_1, \dots, w_k \in \Gamma * \mathbb{Z}$ tels que pour tout $g \in \Gamma$, il existe $1 \leq i \leq k$ vérifiant $w_i(g) = 1_\Gamma$. Alors Γ satisfait une identité mixte non triviale.*

Preuve. On prouve la proposition par récurrence sur k : pour $k = 1$, c'est la définition de MIF. Si $k \geq 2$, par hypothèse de récurrence, les mots $w_1, \dots, w_{\lfloor k/2 \rfloor}$ donnent une identité mixte $v_1 \in \Gamma * \mathbb{Z}$ non triviale et les mots $w_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}, \dots, w_k$ donnent une identité mixte v_2 non triviale également. Posons $w = [v_1, v_2]$, si $w \neq e$, c'est une identité mixte pour Γ , sinon $v_1 v_2 = v_2 v_1$ et puisque v_1, v_2 ne sont pas des éléments de Γ (auquel cas ils seraient triviaux), ils ne peuvent qu'être des puissances d'un même mot $v \in \Gamma * \mathbb{Z}$. D'après [CER93], généralisant un Théorème de Schützenberger [LS62] disant que dans un groupe libre un commutateur ne peut être une puissance propre, on a $w_1 = w_2^{\pm 1} = v$ et v est une identité mixte non triviale pour Γ . $\square$

Une partie $T \subset \Gamma$ est dite *syndétique* s'il existe une partie finie $S \subset \Gamma$ telle que $TS = \Gamma$. Rappelons le lemme de Khintchine [Khi], qui est une forme quantitative du théorème de récurrence de Poincaré.

Lemme 3.9 (Khintchine). *Soit Γ un groupe et $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp ergodique sur un espace de probabilité standard. Pour tous sous-ensembles mesurables $A, B \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \Gamma$ tel que*

$$\mu(A)\mu(B) - \varepsilon < \mu(gA \cap B).$$

De plus, l'ensemble $T := \{g \in \Gamma \mid \mu(A)\mu(B) - \varepsilon < \mu(gA \cap B)\}$ est syndétique.

Un résultat similaire vaut pour la borne $\mu(gA \cap B) < \mu(A)\mu(B) + \varepsilon$. Cependant, il n'est en général pas possible d'avoir les deux bornes simultanément sous la seule hypothèse d'ergodicité. En revanche, pour les actions faiblement mélangeantes, nous avons :

Théorème 3.10 (Bergelson-Rosenblatt). *Soit Γ un groupe et $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp faiblement mélangeante sur un espace de probabilité standard. Pour tous sous-ensembles mesurables $A, B \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$T := \{g \in \Gamma \mid |\mu(A)\mu(B) - \mu(gA \cap B)| < \varepsilon\}$$

est syndétique.

Preuve. On applique 3.10 qui dit que si l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est faiblement mélangeante et $f, g \in L^2(X, \mu)$, alors l'ensemble

$$\{g \in \Gamma \mid \langle \gamma \cdot f, g \rangle < \varepsilon\}$$

est syndétique, où Γ agit sur $L^2(X, \mu)$ par la représentation régulière gauche. Soit $f = (1 - \mu(A))\mathbb{1}_A + \mu(A)\mathbb{1}_{A^c}$, $g = (1 - \mu(B))\mathbb{1}_B + \mu(B)\mathbb{1}_{B^c}$. Soit $\gamma \in \Gamma$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\langle \gamma \cdot f, g \rangle &= \langle (1 - \mu(A))\mathbb{1}_{\gamma A} + \mu(A)\mathbb{1}_{\gamma A^c}, (1 - \mu(B))\mathbb{1}_B + \mu(B)\mathbb{1}_{B^c} \rangle \\
&= (1 - \mu(A))(1 - \mu(B))\mu(\gamma A \cap B) - (1 - \mu(A))\mu(B)\mu(\gamma A \cap B^c) \\
&\quad - \mu(A)(1 - \mu(B))\mu(\gamma A^c \cap B) + \mu(A)\mu(B)\mu(\gamma A^c \cap B^c) \\
&= \mu(\gamma A \cap B) + \mu(A)\mu(B) - (\mu(A) + \mu(B))\mu(\gamma A \cap B) - \mu(A)(\gamma A^c \cap B) - \mu(B)\mu(\gamma A \cap B^c) \\
&= \mu(\gamma A \cap B) - \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Preuve du Théorème 3.5 (i). On note t le générateur de $\mathbb{Z}$. Posons $\ell := \mu(S(g))$ et $\delta \in (0, \frac{1}{3} - \ell)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n := (\ell - \delta)^{2^n} \quad \text{et} \quad \gamma_n := \frac{(3\ell + \delta)^{2^n}}{3}.$$

On construit par récurrence une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\Gamma * \mathbb{Z}$, dont l'image dans $\langle \Gamma, g \rangle$ notée $v_n := w_n(g)$, telle que

$$\alpha_n < \mu(S(v_n)) < \gamma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$w_0 = t$ et $v_0 = g$ satisfont clairement $\alpha_0 < \mu(S(v_0)) < \gamma_0$. Supposons w_n construit. Par hypothèse de récurrence, $\alpha := \mu(S(v_n)) \in (\alpha_n, \gamma_n)$. Posons $A := S(v_n)$ et

$$\varepsilon := \min\{\alpha(\gamma_n - \alpha), \alpha^2 - \alpha_n^2\} > 0.$$

Par le Théorème 3.10, l'ensemble $T := \{h \in \Gamma \mid |\mu(A)^2 - \mu(hA \cap A)| < \varepsilon\}$ est syndétique. Pour tout $h \in T$, le Lemme 3.3 donne

$$\mu(S([hv_n h^{-1}, v_n])) < 3(\alpha^2 + \varepsilon) \leq 3\alpha\gamma_n < \gamma_{n+1}.$$

Si Γ est MIF, on prétend qu'il existe $h \in T$ tel que $\mu(S([hv_n h^{-1}, v_n])) \geq \mu(S(v_n))^2 - \varepsilon \geq \alpha_n^2 = \alpha_{n+1}$. On posera alors

$$w_{n+1}(t) := [hw_n(t)h^{-1}, w_n(t)].$$

Un élément $a \in G$ est dit avoir une *décomposition finie* s'il existe une partition en ensembles mesurables :

$$X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k$$

et des éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in G$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x \in A_i \Rightarrow a(x) = \gamma_i(x)$. Dans le cas où $g \in G$ a une décomposition finie, alors v_n aussi (avec des éléments d'un ensemble fini $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \Gamma$). De plus, il existe un sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$ tel que

$$\bigcup_{s \in F} Ts^{-1} = \Gamma.$$

Soit maintenant $q \in \Gamma$ arbitraire et choisissons $s \in F$ tel que $h := qs \in T$. Par décomposition finie, l'élément $[hv_n h^{-1}, v_n]$ agit sur $x \in X$ comme $he_1^{-1}h^{-1}e_2^{-1}he_3h^{-1}e_4$ où $e_1, e_2, e_3, e_4 \in E \cup \{e\}$. Si

$x \in hA \cap A$, alors $e_3, e_4 \neq e$ et le mot $w(t) := te_1^{-1}t^{-1}e_2^{-1}te_3t^{-1}e_4 \in \Gamma * \mathbb{Z}$ n'est conjugué à aucun élément de Γ . Supposons maintenant que le complémentaire du support de

$$[hv_nh^{-1}, v_n]$$

dans $hA \cap A$ soit de mesure strictement positive, *i.e.* cet élément agit trivialement sur un ensemble de mesure strictement positive. Comme l'action est essentiellement libre, on obtient

$$he_1^{-1}h^{-1}e_2^{-1}he_3h^{-1}e_4 = e_\Gamma,$$

c'est-à-dire $w(q) = e_\Gamma$, où $w(t) = tse_1^{-1}(ts)^{-1}e_2^{-1}tse_3(ts)^{-1}e_4$. Alors chaque $q \in \Gamma$ satisfait une identité mixte non triviale avec des constantes dans $E \cup F$. Par la Proposition 3.8, Γ ne serait pas MIF, donc il existe $h \in T$ vérifiant

$$\ell(w_{n+1}(h)) \geq \mu(hA \cap A) \geq \alpha^2 - \varepsilon \geq \alpha_{n+1}.$$

On pose alors $v_{n+1} = [hv_nh^{-1}, v_n]$, ce qui conclut dans le cas où g est de décomposition finie.

En particulier, ce raisonnement donne une minoration de $\ell(v_n)$ uniforme en la taille de la décomposition finie de g et ne dépendant que de $\ell(g)$. Pour un $g \in G$ arbitraire avec $\ell(g) < \frac{1}{3}$, on conclut en approchant g par un élément de décomposition finie.

Pour ce faire, d'après le Théorème 2.59, si g est apériodique, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un $g' \in G$ périodique de période n tel que $d(g, g') < 2/m$. La construction de g' en fait un élément de décomposition finie : la partition associée est donnée par une tour de Rokhlin, cf. Lemme 2.36, sur chaque étage de laquelle g' agit comme g , sauf sur le dernier étage A_n qui est envoyé par g' sur A_1 . Si g n'est pas apériodique, on définit g' sur un nombre fini arbitrairement grand d'orbites périodiques de g en le faisant agir de manière identique à g sur ces points.

Alors g' est arbitrairement proche de g pour d et on peut prendre g' tel que

$$\alpha_n \leq \ell(w_n(g')) \leq \gamma_n.$$

En prenant m suffisamment grand, on s'assure que

$$\alpha_n \leq \ell(w_n(g)) \leq \gamma_n$$

ce qui conclut. □

Une autre conséquence du lemme de Khintchine pour les sous-groupes non discrets des groupes pleins est la suivante :

Proposition 3.11. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action ergodique, et $\Lambda \subset [\Gamma \curvearrowright (X, \mu)]$ un sous-groupe non discret contenant Γ . Alors $\{\mu(S(g)) \mid g \in \Lambda\}$ est dense dans $[0, 1]$.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un écart δ dans $\{\mu(S(g)) \mid g \in \Lambda\}$, c'est-à-dire $\alpha \in (0, 1)$ tel que $(\alpha, \alpha + \delta) \cap \{\mu(S(g)) \mid g \in \Lambda\} = \emptyset$ et $\alpha \leq 1 - \delta$. Comme Λ n'est pas discret, il

existe $g \in \Lambda$ avec $\mu(S(g)) < \delta$. Soit $h \in \Lambda$ tel que $\mu(S(h)) \in \left[\alpha - \frac{\delta\mu(S(g))}{3}, \alpha\right]$. Par le lemme 3.9, on peut choisir $t \in \Gamma$ tel que

$$\mu(S(h) \cap tS(g)) \leq \mu(S(g))\mu(S(h)) + \frac{\delta\mu(S(g))}{3}.$$

Alors $htgt^{-1}$ a un support de mesure comprise entre

$$\alpha + \frac{\delta\mu(S(g))}{3} \quad \text{et} \quad \alpha + \delta,$$

ce qui contredit l'hypothèse sur δ . □

3.3 Actions mélangeantes

Rappelons qu'une action pmp de Γ sur (X, μ) est *mélangeante* si pour tous sous-ensembles mesurables $A, B \subseteq X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $F \subset \Gamma$ tel que pour tout $\gamma \notin F$,

$$|\mu(\gamma A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \varepsilon.$$

Lemme 3.12. *Soit Γ un groupe dénombrable et $\Lambda \leq \Gamma$ un sous-groupe d'indice fini. Si $\Gamma \curvearrowright X$ est une action faiblement mélangeante, alors la restriction de l'action à Λ est ergodique.*

Preuve. On peut supposer Λ distingué dans Γ . Soit $\mathcal{A}$ la σ -algèbre des sous-ensembles de X fixés par Λ . Comme Λ est distingué, $\mathcal{A}$ est Γ -invariante, et $\Gamma \curvearrowright (X/\mathcal{A}, \mu/\mathcal{A})$ est un facteur sur lequel Λ agit trivialement. Ce facteur est aussi faiblement mélangeant, donc trivial (i.e., $\mathcal{A}$ est triviale). □

Lemme 3.13. *Soit $\mathbb{Z} \curvearrowright X$ une action faiblement mélangeante, et g une transformation préservant la mesure de (X, μ) . Supposons qu'il existe un sous-ensemble $A \subseteq X$ de mesure positive et $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $gx = zx$ pour tout $x \in A$. Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $[g, z^{nk}gz^{-nk}]$ est trivial pour un certain $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $S(g)$ a mesure pleine.*

Preuve. Soit $\Lambda = \langle z^k \rangle$. L'ensemble $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda S(g)$ est Λ -invariant, et g agit trivialement sur B . Le facteur $\pi : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ associé à la σ -algèbre de B est Λ -invariant, et g induit l'identité sur Y . Comme $\pi(zx) = \pi(x)$ pour tout $x \in A$ et que $\Lambda \curvearrowright X$ est ergodique, on a $\pi(zx) = \pi(x)$ pour presque tout $x \in X$. Ainsi, $\Lambda \curvearrowright Y$ est triviale, donc Y est un point, c'est-à-dire $\ell(g) = 1$. □

Proposition 3.14. *Soit Γ un groupe dénombrable sans torsion, et $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp mélangeante. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $g \in [\Gamma \curvearrowright (X, \mu)]$ non trivial et ne supportant pas toute la mesure, il existe $h \in \Gamma$ tel que $[g, hgh^{-1}]$ est non trivial et*

$$\mu(S([g, hgh^{-1}])) < 3\mu(S(g))^2 + \varepsilon.$$

Preuve. Il existe $\lambda \in \Gamma$ et $A \subseteq X$ de mesure positive tels que $gx = \lambda x$ pour tout $x \in A$. Comme $\Lambda = \langle \lambda \rangle \curvearrowright X$ est mélangeante, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|\mu(S(g) \cap \lambda^n S(g)) - \mu(S(g))^2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par la Proposition 3.3, on a alors

$$\mu(S([g, \lambda^n g \lambda^{-n}])) < 3\mu(S(g) \cap \lambda^n S(g)) < 3\mu(S(g))^2 + \varepsilon.$$

Comme le support de g n'a pas mesure pleine, le Lemme 3.13 garantit l'existence de $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $[g, \lambda^{nk} g \lambda^{-nk}]$ est non trivial. On pose $h := \lambda^{nk}$. $\square$

Preuve du Théorème 3.5 (ii). Cela découle immédiatement de la proposition précédente. On définit une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $g_0 = g$ et $g_{n+1} := [g_n, h g_n h^{-1}]$ pour un $h \in \Gamma$ convenable. Si $\mu(S(g_0)) < \frac{1}{3}$, alors $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments non triviaux convergeant vers l'identité dans le groupe plein. $\square$

Remarque 3.15. Soit Λ un groupe dénombrable, et posons $\Gamma := \Lambda \times \mathbb{Z}$ avec générateur z de $\mathbb{Z}$. Considérons les actions de Bernoulli $\Lambda \curvearrowright (\{0, 1\}^\Lambda, \nu_\Lambda)$ et $\Gamma \curvearrowright (\{0, 1\}^\Gamma, \nu_\Gamma)$. Comme $\Gamma/\mathbb{Z} = \Lambda$, on peut voir la première comme une action non fidèle de Γ .

Soit $X := \{0, 1\}^\Lambda \times \{0, 1\}^\Gamma = \{0, 1\}^{\Lambda \sqcup \Gamma}$ muni de la mesure produit $\mu := \nu_\Lambda \times \nu_\Gamma$. Alors $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ diagonalement préserve la mesure. L'action de Λ sur X est un décalage de Bernoulli et $\Lambda \curvearrowright \Lambda \sqcup \Gamma$ est libre. De plus, $\Gamma \curvearrowright X \times X$ est ergodique, donc $\Gamma \curvearrowright X$ est faiblement mélangeante.

Soit $A \subset \{0, 1\}^\Lambda$ de mesure positive, et posons $B := A \times \{0, 1\}^\Gamma$. Alors $\mu(B) = \nu_\Lambda(A) > 0$, et B est $\mathbb{Z}$ -invariant. Soit $g \in [\Gamma \curvearrowright (X, \mu)]$ la restriction de z à B . Pour $h = (\lambda, z^k) \in \Gamma$, on a :

- Si $x \in \lambda A$, alors $hgh^{-1}(x, y) = (x, zy)$.
- Si $x \notin \lambda A$, alors $hgh^{-1}(x, y) = (x, y)$.

Ainsi, hgh^{-1} est la restriction de z à $hB = \lambda A \times \{0, 1\}^\Gamma$, et g commute avec hgh^{-1} . La stratégie de nos résultats ne s'applique donc pas ici. Notons que $\Gamma \curvearrowright X$ est faiblement mélangeante mais pas mélangeante, et que Γ n'est pas MIF, donc aucun de nos deux résultats ne s'applique.

3.4 Actions ergodiques des groupes MIF

L'objectif de cette section est de démontrer le Théorème 3.7. Soit $1 > a_0 > 0$. Nous utiliserons les propriétés de la famille de suites $(a_{m,\delta})_{m=0}^\infty$ définie pour $\delta \in [0, 1)$ par

$$a_{0,\delta} = a_0 \quad \text{et} \quad a_{m+1,\delta} = \frac{1}{2 - a_{m,\delta}(1 - \delta)}.$$

On note $a_m = a_{m,0}$.

Proposition 3.16. Soient $a_{m,\delta}$ et a_m définis comme ci-dessus. Alors pour tout $m \geq 0$:

1. $a_m = 1 - \frac{1-a_0}{m(1-a_0)+1}$, donc $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 1$.

2. $0 < a_{m,\delta_1} \leq a_{m,\delta_0} < 1$ si $1 > \delta_1 \geq \delta_0 \geq 0$.
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} a_{m,\delta} = a_m$.
4. Si $N_0 \geq 0$ est un entier et $(b_m)_{m=0}^{N_0}$ est une suite avec $1 \geq b_0 \geq a_0$ et $1 \geq b_{m+1} \geq \frac{1}{2-b_m(1-\delta)}$ pour tout $0 \leq m < N_0$, alors $b_m \geq a_{m,\delta}$ pour tout $0 \leq m \leq N_0$.
5. Si $a_0 \leq \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$, alors $(a_{m,\delta})_m$ est croissante et $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,\delta} = \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$.

Preuve. Les points (1) à (4) se démontrent par récurrence sur m . Pour (5), si $a_0 \leq \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$, alors par récurrence $a_{m,\delta} \leq \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$, ce qui équivaut à $\delta \leq \left(\frac{1-a_{m,\delta}}{a_{m,\delta}}\right)^2$. La suite $(a_{m,\delta})_m$ est croissante car $(1-\delta)a_{m,\delta}^2 - 2a_{m,\delta} + 1 \geq 0$. Sa limite L_δ vérifie $L_\delta = \frac{1}{2-L_\delta(1-\delta)}$, donc $L_\delta = \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$. $\square$

Lemme 3.17. Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp d'un groupe MIF Γ , et $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier N , il existe $k \in \Gamma$ tel que $\mu(kS(g) \Delta S(g)) < \varepsilon$, $[k, g]$ est d'ordre $\geq N$, et $[k, g]$ ne commute pas avec g .

Preuve. On suppose $0 < \mu(S(g)) < 1$. Posons $a_0 := \mu(S(g))$. Soit N_0 tel que $a_{N_0} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Par les points (3) et (5) de la Proposition 3.16, il existe $\delta \in (0, 1)$ tel que $a_{0,\delta} \leq a_{1,\delta} \leq \dots \leq a_{N_0,\delta}$ et $a_{N_0,\delta} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N_1 > N$ tel que $N_1 > \frac{1-\mu(S(g))}{\mu(S(g))\delta} + 1$.

Pour $h \in \Gamma$ et des entiers $i_0, i_1, \dots$, définissons $w_{i_0}(h) := h^{i_0}$ et

$$w_{i_0, \dots, i_m}(h) := [w_{i_0, \dots, i_{m-1}}(h), g]^{i_m} \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Comme Γ est MIF, la Proposition 3.8 garantit l'existence de $h \in \Gamma$ tel que pour tous $i_0, \dots, i_{N_0} \in \{1, \dots, N_1\}$, l'élément

$$[w_{i_0, \dots, i_{N_0}}(h), g]$$

est non trivial. En particulier, pour tout choix de $i_0, \dots, i_{N_0-1} \in \{1, \dots, N_1\}$, les éléments $h, [w_{i_0}(h), g], \dots, [w_{i_0, \dots, i_{N_0-1}}(h), g]$ ont un ordre $> N_1$.

Pour tout $B \subseteq X$ de mesure non nulle, soit μ_B la mesure normalisée sur B . On définit par récurrence des ensembles $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_{N_0} \supseteq S(g)$ et des entiers $j_0, \dots, j_{N_0-1} \in \{1, \dots, N_1\}$ tels que :

- $X_m \supseteq S([w_{j_0, \dots, j_{m-1}}(h), g])$,
- $\mu_{X_{m+1}}(S(g)) > \frac{1}{2-\mu_{X_m}(S(g))(1-\delta)}$ pour tout $m = 0, \dots, N_0 - 1$.

Soit $X_0 = X$, par le Lemme 3.4, il existe $j_0 \in \{1, \dots, N_1\}$ tel que $\mu_{X_0}(h^{j_0}S(g) \cap S(g)) > \mu_{X_0}(S(g))^2(1-\delta)$. On pose $X_1 = S(g) \cup h^{j_0}S(g)$, alors

$$\mu_{X_0}(X_1) < 2\mu_{X_0}(S(g)) - \mu_{X_0}(S(g))^2(1-\delta)$$

, et

$$\mu_{X_1}(S(g)) > \frac{1}{2 - \mu_{X_0}(S(g))(1-\delta)}.$$

X_1 contient $S([h^{j_0}, g]) = S([w_{j_0}(h), g])$.

Supposons X_m et $j_0, \dots, j_{m-1}$ définis. Comme $X_m \supseteq S([w_{j_0, \dots, j_{m-1}}(h), g])$, X_m est invariant sous $[w_{j_0, \dots, j_{m-1}}(h), g]$. Par le Lemme 3.4, il existe $j_m \in \{1, \dots, N_1\}$ tel que

$$\mu_{X_m}(w_{j_0, \dots, j_m}(h)S(g) \cap S(g)) > \mu_{X_m}(S(g))^2(1 - \delta).$$

On pose $X_{m+1} = S(g) \cup w_{j_0, \dots, j_m}(h)S(g)$. Alors $\mu_{X_m}(X_{m+1}) < 2\mu_{X_m}(S(g)) - \mu_{X_m}(S(g))^2(1 - \delta)$, et

$$\mu_{X_{m+1}}(S(g)) > \frac{1}{2 - \mu_{X_m}(S(g))(1 - \delta)}.$$

X_{m+1} contient $S([w_{j_0, \dots, j_m}(h), g])$.

On pose $k := w_{j_0, \dots, j_{N_0-1}}(h)$. Alors k et $[k, g]$ ont un ordre $\geq N_1 > N$, et $X_{N_0} = S(g) \cup kS(g)$. Par le point (4) de la Proposition 3.16, $\mu_{X_m}(S(g)) \geq a_{m, \delta}$ pour tout $m \leq N_0$, donc $\mu_{X_{N_0}}(S(g)) \geq a_{N_0, \delta} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\mu(S(g) \cup kS(g)) < \mu(S(g)) + \frac{\varepsilon}{2},$$

et $\mu(S(g) \Delta kS(g)) < \varepsilon$. □

Preuve du Théorème 3.7. Si $t = 1$, le résultat est trivial. On suppose donc $t < 1$. Fixons $\varepsilon_0 > 0$ et choisissons $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tel que

$$t(1 - 2\varepsilon) - t^2(1 + \varepsilon)^3 > \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Par le Lemme 3.4, il existe $N > 0$ tel que pour toute transformation préservant la mesure T sur un espace de probabilité (Y, ν) et tout sous-ensemble mesurable $C \subseteq Y$ avec $\nu(C) \geq \frac{1}{6}$, il existe $i \in \{1, \dots, N - 1\}$ tel que

$$\nu(T^i C \cap C) > \nu(C)^2(1 - \varepsilon^2).$$

Soit $g_0 \in \Gamma \setminus \{1\}$ tel que $t \leq \mu(S(g_0)) < t(1 + \varepsilon)$. Par le Lemme 3.17, il existe $g \in G$ d'ordre $> N$ avec $\mu(S(g)) < t(1 + \varepsilon)$. Par ergodicité, il existe un sous-ensemble syndétique $D \subset \Gamma$ tel que pour tout $k \in D$,

$$\mu(S(g) \cap kS(g)) < \mu(S(g))^2(1 + \varepsilon) < t^2(1 + \varepsilon)^3.$$

Fait 1. Il existe $k \in D$ tel que pour tous $1 \leq i, j < N$, g^i et kg^jk^{-1} ne commutent pas. De plus, pour un tel k ,

$$\mu_{S(g)}(S(g) \cap S(kgk^{-1})) \geq \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mu_{S(kgk^{-1})}(S(g) \cap S(kgk^{-1})) \geq \frac{1}{6}.$$

Preuve du Fait 1. Soit $F_D \subset \Gamma$ fini tel que $DF_D = \Gamma$. Si aucun tel k n'existe, alors pour tout $h \in \Gamma$, il existe $s \in F_D$ et $1 \leq i, j \leq N$ tels que $[g^i, hs^{-1}g^jsh^{-1}] = e$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels triplets (s, i, j) , la Proposition 3.8 implique que Γ satisfait une identité mixte non triviale, ce qui contredit l'hypothèse MIF.

Pour la deuxième partie, le Lemme 3.3 appliquée à g et kgk^{-1} donne

$$t \leq \mu(S([g, kgk^{-1}])) \leq 3\mu(S(g) \cap S(kgk^{-1})).$$

Ainsi,

$$\frac{\mu(S(g) \cap S(kgk^{-1}))}{\mu(S(g))} \geq \frac{t}{3t(1+\varepsilon)} \geq \frac{1}{6},$$

et de même pour $\mu_{S(kgk^{-1})}(S(g) \cap S(kgk^{-1}))$. $\square$

Fixons $k \in D$ comme dans l’Affirmation, et posons $h = kgk^{-1}$. Comme $S(g)$ est g -invariant, en appliquant le choix de N à $\langle g \rangle \curvearrowright (S(g), \mu_{S(g)})$ et à $S(g) \cap S(h)$, il existe $1 \leq i < N$ tel que

$$\mu_{S(g)}(g^i(S(g) \cap S(h)) \cap S(g) \cap S(h)) \geq \mu_{S(g)}(S(g) \cap S(h))^2(1 - \varepsilon^2).$$

C’est-à-dire,

$$\mu(g^i(S(g) \cap S(h)) \cap S(g) \cap S(h)) \geq \frac{\mu(S(g) \cap S(h))^2}{t}(1 - \varepsilon).$$

De même, il existe $1 \leq j < N$ tel que

$$\mu(h^j(S(g) \cap S(h)) \cap S(g) \cap S(h)) \geq \frac{\mu(S(g) \cap S(h))^2}{t}(1 - \varepsilon).$$

Comme $S(g^i) \subseteq S(g)$ et $t \leq \mu(S(g^i)) \leq \mu(S(g)) \leq t(1 + \varepsilon)$, on a $\mu(S(g^i) \Delta S(g)) < \varepsilon t$. De même, $\mu(S(h^j) \Delta S(h)) < \varepsilon t$. Ainsi,

$$\mu(g^i(S(g^i) \cap S(h^j)) \cap S(g^i) \cap S(h^j)) \geq \frac{\mu(S(g^i) \cap S(h^j))^2}{t}(1 - \varepsilon) - 4\varepsilon t,$$

et une inégalité similaire pour h^j . Posons $A = S(g^i) \cap S(h^j)$. Alors

$$\mu(A) \leq \mu(S(g) \cap S(h)) + 2\varepsilon t < t^2(1 + \varepsilon)^3 + 2\varepsilon t,$$

donc par choix de ε ,

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} < t - \mu(A).$$

$\square$

4 Actions compactes

4.1 Actions profinies

Définition 4.1. Une action de groupe $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ pmp est dite *compacte* si l'image de Γ dans $\text{Aut}(X, \mu)$ est compacte pour la topologie faible.

On rappelle que deux actions pmp $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ et $\Gamma \curvearrowright^\beta (Y, \nu)$ sont *isomorphes* s'il existe deux ensembles de mesure pleine $A \subseteq X, B \subseteq Y$ et une bijection pmp $f : A \rightarrow B$ vérifiant pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in A$,

$$f(\alpha(\gamma, x)) = \beta(\gamma, f(x)).$$

Si on a un groupe compact K , un morphisme $\varphi : \Gamma \rightarrow K$ d'image dense et un sous-groupe L de K tel que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est isomorphe à l'action $\Gamma \curvearrowright (K/L, \mu_{\text{Haar}})$ induite par φ , alors les groupes pleins associés sont isomorphes en tant que groupes topologiques et l'image de Γ dans $\text{Aut}(X, \mu)$ est également d'adhérence compacte. Réciproquement, on a la proposition suivante.

Proposition 4.2. Soit Γ un groupe topologique à base dénombrable d'ouverts et $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action pmp ergodique compacte sur (X, μ) standard. Alors il existe $\Lambda \leq \Gamma$ un sous-groupe fermé tel que l'action α est isomorphe à celle donnée par $\Gamma \curvearrowright (\Gamma/\Lambda, \tilde{m})$ où $\tilde{m}$ est l'image de la mesure de Haar sur Γ par la projection $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Lambda$.

Preuve. D'après [Gla03, Thm 2.18], on peut se ramener au cas où X est compact et α est continue. Par ergodicité, il existe $x_0 \in X$ tel que $\mu(\Gamma \cdot x_0) = 1$. Soit $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x_0 = x_0\}$, c'est un sous-groupe fermé de Γ . Ensuite, par continuité de $\eta : \gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ et quitte à l'étendre implique l'existence d'une bijection continue $\theta : \Gamma/\Lambda \rightarrow X$ telle que $\eta = \theta \circ \pi$. Mais alors $\eta_*\mu$ est une mesure de probabilité invariante par translation à gauche par les éléments de Γ , c'est donc la mesure de Haar normalisée m et l'on a $\theta^*\mu = \tilde{m}$. $\square$

Un exemple d'action compacte de Γ sur un espace de probabilité standard est décrit par la construction suivante. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis munis d'applications $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ et d'une action transitive de Γ .

Définition 4.3. On définit la *limite projective* de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme étant l'ensemble

$$X = \text{proj lim}(X_n)_n = \left\{ (a_n)_n \in \prod_n X_n \mid \forall n, a_n = f_n(a_{n+1}) \right\}.$$

Si les f_n sont surjectives et si l'action de Γ commute avec les f_n , alors Γ agit par translation sur chaque coordonnée de X : c'est l'action profinie de Γ sur X .

Proposition 4.4. Si chaque X_n est muni de la mesure uniforme, l'action de Γ sur X est une action pmp ergodique compacte.

Preuve. Soit $(a_n)_n \in X$, le sous-groupe $\Gamma_n = \text{Stab}(a_n)$ de Γ est d'indice fini. Remarquons que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est isomorphe à l'action de Γ sur $\text{proj lim}(\Gamma/\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par la translation à gauche sur chaque niveau. Puisque les Γ_n sont d'indice fini dans Γ , les sous-groupes Γ'_n sont distingués et également d'indice fini. Posons $K = \text{proj lim}(\Gamma/\Gamma'_n)$ obtenu à partir des applications $\varphi_n : \Gamma/\Gamma'_{n_1} \rightarrow \Gamma/\Gamma'_n$. Notons $\pi_n : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma_n$ la projection canonique et $L = \{(g_n)_n \in K \mid \forall n, g_n \in \pi_n(\Gamma_n)\}$. Alors l'action de Γ sur $\text{proj lim}(\Gamma/\Gamma_n)$ s'identifie isomorphiquement à celle de Γ sur K/L . Le sous-groupe L de K étant fermé comme intersection de fermés, K/L est compact. $\square$

4.2 Actions compactes essentiellement libres

On a l'analogue suivant du Théorème 3.7 dans le cas compact.

Théorème 4.5. *Soit Γ un groupe MIF et $\Gamma \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action ergodique fidèle pmp compacte. Si α est discrète, alors elle est essentiellement libre.*

Preuve du Théorème 4.5. Par hypothèse,

$$t := \inf \{ \mu(S(g)) : g \in \Gamma \setminus \{e\} \}$$

est strictement positif, montrons que $t = 1$. Dans toute la suite, on identifie Γ à son image dans $\text{Aut}(X, \mu)$. Soit K l'adhérence de Γ dans $\text{Aut}(X, \mu)$, compacte par hypothèse. Nous commençons par l'assertion suivante.

Fait 2. Pour tout $g_0 \in \Gamma \setminus \{1\}$, tout $\varepsilon > 0$ et tout entier naturel n , il existe un élément $g_1 \in \Gamma$ d'ordre strictement supérieur à n tel que

$$\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) < \varepsilon.$$

Preuve du Fait 2. Soit V un voisinage ouvert de l'identité dans K tel que

$$\mu(kS(g_0) \Delta S(g_0)) < \varepsilon$$

pour tout $k \in V$. Il existe alors un élément $k \in V \cap \Gamma$ tel que $[k, g_0]$ soit d'ordre strictement supérieur à n . En effet, supposons le contraire. Comme K est compact et Γ dense dans K , il existe un ensemble fini $F \subseteq \Gamma$ tel que

$$VF = K.$$

Alors, pour tout $h \in \Gamma$, il existe $s \in F$ tel que $hs^{-1} \in V \cap \Gamma$, et donc un entier $1 \leq i \leq n$ vérifiant

$$[hs^{-1}, g_0]^i = e_\Gamma.$$

La Proposition 3.8 impliquerait alors que Γ satisfait une identité mixte non triviale, ce qui contredit l'hypothèse MIF. Posons

$$g_1 = [k, g_0].$$

Le support de g_1 est contenu dans

$$kS(g_0) \cup S(g_0),$$

d'où

$$\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) \leq \mu(kS(g_0) \setminus S(g_0)) < \varepsilon.$$

Cela conclut la preuve du Fait 2. □

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et choisissons $g_0 \in \Gamma \setminus \{1\}$ tel que

$$\mu(S(g_0)) < t + \varepsilon.$$

Comme K est compact, il existe un voisinage de l'identité $U \subseteq K$ invariant par conjugaison tel que pour tout $k \in U$, $\mu(kS(g_0) \Delta S(g_0)) < \varepsilon$. Par compacité, il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout $k \in K$, on puisse trouver $1 \leq i < n$ vérifiant $k^i \in U$. D'après le Fait 2, il existe $g_1 \in \Gamma$ d'ordre strictement supérieur à n tel que $\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) < \varepsilon$.

Choisissons $1 \leq i < n$ tel que $g_1^i \in U$ et posons

$$g = g_1^i.$$

Comme $S(g) \subseteq S(g_1)$ et $g \neq e$, on $t \leq \mu(S(g))$, d'où $\mu(S(g) \Delta S(g_0)) < 2\varepsilon$. Il s'ensuit que pour tout $k \in U$,

$$\mu(kS(g) \Delta S(g)) < 5\varepsilon.$$

Par ergodicité, il existe un sous-ensemble syndétique $D \subseteq \Gamma$ tel que pour tout $k \in D$,

$$\mu(S(g) \cap kS(g)) < \mu(S(g))^2 + \varepsilon < t^2 + 16\varepsilon.$$

En raisonnant comme dans la preuve du Fait 1, on trouve un élément $k \in D$ tel que g et kgk^{-1} ne commutent pas. Posons $h = kgk^{-1}$, alors

$$S(h) = kS(g), \quad \mu(S(h)) = \mu(S(g)),$$

et d'après le Lemme de Khintchine 3.9,

$$\begin{aligned} \mu(S(g) \cap S(h)) &< \mu(S(g))^2 + \varepsilon \\ &< (\mu(S(g_0)) + \mu(S(g) \Delta S(g_0))) + \varepsilon \\ &\leq (t + 3\varepsilon)^2 + \varepsilon \\ &< t^2 + 16\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme U est invariant par conjugaison, les éléments kgk^{-1} et $k^{-1}gk$ appartiennent à U , on obtient donc

$$\mu(hS(g) \Delta S(g)) < 5\varepsilon,$$

et

$$\mu(gS(h)\Delta S(h)) < 5\varepsilon.$$

En posant $A = S(g) \cap S(h)$, on déduit que

$$\mu(gA \cap A) \geq \mu(A) - 5\varepsilon,$$

et

$$\mu(hA \cap A) \geq \mu(A) - 5\varepsilon.$$

Puisque g et h ne commutent pas,

$$t \leq \ell([g, h]).$$

En appliquant le Lemme 3.3,

$$\begin{aligned} t &\leq \ell([g, h]) \\ &\leq 3\mu(A) - \mu(gA \cap A) - \mu(hA \cap A) \\ &\leq \mu(A) + 10\varepsilon \\ &\leq t^2 + 26\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme g_0 dont dépend $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $t = 1$. □

Corollaire 4.6. Soit $\Gamma = \Gamma_0 \geq \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \dots$ une chaîne de sous-groupes d'indices finis de Γ MIF. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$t_\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{x \in \Gamma/\Gamma_n \mid \gamma x = x\}|}{[\Gamma : \Gamma_n]}.$$

S'il existe $\gamma \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$ tel que $t_\gamma > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \Gamma$ tel que $t_g > 1 - \varepsilon$.

Ce résultat donne l'alternative suivante : soit la chaîne $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Farber, c'est à dire que pour tout $g \neq e_\Gamma$, $t_g = 0$, soit pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que la probabilité que γ soit contenu dans un conjugué de Γ_n est au moins $1 - \varepsilon$.

La contraposée du Théorème 4.5 dit que pour toute action ergodique compacte non essentiellement libre α d'un groupe MIF Γ sur un espace de probabilité standard (X, μ) , il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments non triviaux de Γ tels que $l(\gamma_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. A noter que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut à priori pas être choisie indépendamment de l'action α , cependant, une question similaire a été résolue par A. Thom, nous en discutons dans la section suivante.

4.3 Suites convergentes dans les groupes discrets

La notion de convergence d'une suite d'éléments d'un groupe discret infini Γ peut être comprise au sens précédent de la convergence par rapport à une action pmp donnée, mais elle peut également être définie par la convergence d'une certaine classe de représentations de Γ , par exemple la convergence des représentations à valeurs dans un groupe compact.

Définition 4.7. Soit Γ un groupe discret de type fini. On dit qu'une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Bohr converge* vers $\gamma \in \Gamma$ si pour tout morphisme $\pi : \Gamma \rightarrow K$ vers un groupe compact K , on a $\pi(\gamma_n) \rightarrow \gamma$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On dit que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Bohr converge fortement* si elle est Bohr convergente et si $\pi(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément lorsque π parcourt l'ensemble des représentations unitaires de Γ d'une dimension fixée.

A. Thom a démontré le résultat suivant.

Théorème 4.8. [Tho13, Thm1.1] Soit Γ un groupe discret de type fini, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une suite d'éléments non triviaux de Γ Bohr convergeant fortement vers e_Γ .
- (ii) Γ n'est pas virtuellement abélien.

En comparant ce résultat au Corollaire 4.6, on peut se poser la question suivante.

Question 2. Étant donné un groupe non abélien Γ , existe-t-il une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments non triviaux telle que pour toute action pmp ergodique compacte non essentiellement libre $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\ell(\gamma_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

La preuve se décompose en trois cas :

1. Γ est virtuellement abélien.
2. Γ a un sous-groupe libre.
3. Γ n'a pas de sous-groupe libre et n'est pas virtuellement abélien.

Dans le premier cas, supposons avoir trouvé une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant Bohr fortement vers e_Γ . Puisque Γ est virtuellement abélien, il existe A un groupe abélien et F un groupe fini formant une suite exacte :

$$1 \rightarrow A \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 1.$$

Le groupe fini F n'a que des représentations unitaires fidèles en dimension finie, on peut donc supposer que $\gamma_n \in A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $\hat{A} = \text{hom}(A, \mathbb{S}_1)$ le dual de Pontrjagin de A équipé de la mesure de Haar normalisée μ .

Lemme 4.9. Il existe $\chi \in \hat{A}$ tel que $\chi(\gamma_n) \not\rightarrow e_\Gamma$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve. Si à l'inverse $\chi(\gamma_n) \rightarrow e_\Gamma$ pour tout $\chi \in \hat{A}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ la transformée de Fourier inverse

$$\int_{\hat{A}} \chi(\gamma_n) d\mu(\chi) = 0.$$

D'autre part, le théorème de convergence dominée donne

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\hat{A}} \chi(\gamma_n) d\mu(\chi) = \int_{\hat{A}} d\mu(\chi) = 1,$$

contradiction. □

L'indice de A dans Γ étant fini, le caractère $\chi : A \rightarrow \mathbb{S}_1$ donné par le Lemme 4.9 induit une représentation π sur $\text{Ind}_A^\Gamma = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}_1 \mid f(ag) = \chi(a)f(g), \forall a \in A, g \in \Gamma\}$, avec l'action de π donnée pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $f \in \text{Ind}_A^\Gamma$ par

$$(\pi(\gamma)f)(\gamma') = f(\gamma\gamma').$$

La représentation π est unitaire, de dimension finie et satisfait $\pi(\gamma_n) \not\rightarrow e_\Gamma$, ce qui prouve le résultat dans le cas où Γ est virtuellement abélien.

On donne ensuite la preuve du cas 2 qui utilise des techniques similaires à celles de la preuve du Théorème 3.5, la démonstration du cas 3 fait appel à des résultats sur les groupes de Lie.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans ce qui suit et on équipe le groupe unitaire $U(n)$ de la longueur invariante par conjugaison $\ell(g) := \|1 - g\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur. On a alors une distance sur $U(n)$ donnée par $d(g, h) = \ell(gh^{-1})$. Pour tout $g, h \in U(n)$, on a

$$\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h), \quad \ell([g, h]) \leq 2\ell(g)\ell(h),$$

la deuxième inégalité venant du fait que

$$\ell([g, h]) = \|hg - gh\| = \|(1 - h)(1 - g) - (1 - g)(1 - h)\| \leq 2\ell(g)\ell(h).$$

Proposition 4.10. *Il existe une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments non triviaux du groupe libre $\mathbb{F}_2$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(n) > 0$ vérifiant pour toute représentation unitaire $\pi : \mathbb{F} \rightarrow U(n)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\ell(\pi(z_k)) \leq \frac{C(n)}{2^k}.$$

Lemme 4.11. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $q(n, \varepsilon)$ tel que pour tout $g \in U(n)$, il existe $m \in \{1, \dots, q(n, \varepsilon)\}$ vérifiant $\ell(g^m) \leq \varepsilon$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un entier q tel que $\ell(g^m) > \varepsilon$ pour tout $m \in \{1, \dots, q\}$. Alors, pour tous $1 \leq m, m' \leq q$ distincts,

$$d(g^m, g^{m'}) = \ell(g^{|m-m'|}) > \varepsilon.$$

Les boules de rayon $\varepsilon/2$ centrées en les éléments g^m sont donc deux à deux disjointes. Notons μ la mesure de Haar sur $U(n)$, on obtient alors

$$\mu(U(n)) \geq q \mu(\{u \in U(n) \mid \ell(u) \leq \varepsilon/2\}).$$

Par conséquent,

$$q \leq \frac{\mu(U(n))}{\mu(\{u \in U(n) \mid \ell(u) \leq \varepsilon/2\})}.$$

Il suffit donc de choisir

$$q(n, \varepsilon) > \frac{\mu(U(n))}{\mu(\{u \in U(n) \mid \ell(u) \leq \varepsilon/2\})}.$$

□

Preuve de la Proposition 4.10. Notons a et b les générateurs de $\mathbb{F}_2$, l'ensemble

$$\{a^n b a^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset F_2$$

est libre, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation non triviale entre ces éléments. Choisissons une bijection

$$\varphi : \{*\} \sqcup (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Pour $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, posons

$$w_{k,n} = a^\ell b a^{-\ell}, \quad \ell = \varphi(k, n),$$

et

$$w = a^\ell b a^{-\ell}, \quad \ell = \varphi(*).$$

On définit par récurrence la suite

$$v_{k,1} = \begin{cases} w_{k,1} w^k w_{k,1}^{-1}, & k \geq 1, \\ w_{k,1} w^{k-1} w_{k,1}^{-1}, & k \leq 0. \end{cases}$$

$$v_{k,n+1} = w_{k,n+1} [v_{k-1,n}, [v_{k,n}, v_{k+1,n}]] w_{k,n+1}^{-1}.$$

On vérifie facilement par récurrence que pour tout $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $v_{k,n} \neq e$. En effet pour tout n , l'ensemble $\{v_{k,n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est libre, cela résulte du fait que $[[a, b], c] \neq e$ dans un groupe libre de rang 3, ainsi que de l'observation que la conjugaison par les éléments $w_{k,n}$ préserve la liberté. Considérons maintenant un morphisme $\pi : F_2 \rightarrow U(r)$ et la fonction longueur induite $\ell(g) = \|1 - \pi(g)\|$. On a toujours

$$\ell(g) \leq 2.$$

Le Lemme 4.11 donne

$$\ell(v_{k,n+1}) \leq 2^2 \ell(v_{k-1,n}) \ell(v_{k,n}) \ell(v_{k+1,n}). \quad (1)$$

En appliquant (1) aux indices $k-1$, k et $k+1$, on obtient

$$\ell(v_{k,n+2}) \leq 2^8 \ell(v_{k-2,n}) \ell(v_{k-1,n})^2 \ell(v_{k,n})^3 \ell(v_{k+1,n})^2 \ell(v_{k+2,n}). \quad (2)$$

Comme toutes les longueurs sont majorées par 2, on a

$$\ell(v_{k,n+2}) \leq 2^{14} \ell(v_{k,n})^3.$$

En particulier, si $\ell(v_{k,n}) \leq 2^{-15}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\ell(v_{k,n+2}) \leq 2^{-16} \ell(v_{k,n}) \quad (3)$$

Par ailleurs, si $\ell(v_{k,n}) \leq 2^{-15}$, alors (2) implique également

$$\ell(v_{k\pm 1,n+2}) \leq 2^{15} \ell(v_{k,n})^2 \leq 2^{-15}.$$

Ainsi, la propriété

$$\ell(v_{k,n}) \leq 2^{-15}$$

se propage à vitesse 1 dans la direction de l'indice k lorsque l'on augmente n de 2. De plus, une fois cette propriété acquise, l'inégalité (3) montre que la quantité $\ell(v_{k,n})$ décroît exponentiellement en n . D'après le Lemme 4.11, il existe $q = q(r, 2^{-15})$ tel qu'il existe $m \in \{1, \dots, q\}$ vérifiant $\ell(w^m) \leq 2^{-15}$. On pose alors $z_n := v_{0,2n+1}$, et la suite (z_n) convient. En effet, les observations précédentes montrent que

$$\ell(v_{k,2n}) \leq 2^{-15}, \quad q - n \leq k \leq n.$$

En particulier,

$$\ell(z_q) \leq 2^{-15}.$$

Puis (3) implique que

$$\ell(z_n) \leq 2^{-15-16(n-q(r, 2^{-15}))}, \quad n \geq 2q.$$

Ainsi, $\ell(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui démontre la proposition □

4.4 Complétion profinie

On termine en montrant que l'hypothèse MIF des Théorèmes 3.7 et 4.5 est essentielle.

Soit Γ un groupe discret et soit $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes normaux telle que $\Gamma = \Gamma_0$ et $\bigcap_n \Gamma_n = \{e\}$.

Définition 4.12. La *complétion profinie* de Γ est la limite projective de la suite $(\Gamma/\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Considérons la complétion profinie correspondante $\widehat{\Gamma}$ muni de sa mesure de Haar μ_H . Soit $\widehat{\Gamma}_n$ l'adhérence de Γ_n dans $\widehat{\Gamma}$.

Soit $k = [\Gamma : \Gamma_n]$ et soient $g_1, \dots, g_k$ des représentants des classes à gauche modulo Γ_n , de sorte que

$$\Gamma = \bigsqcup_{i=1}^k g_i \Gamma_n.$$

Il s'ensuit que

$$\widehat{\Gamma} = \bigsqcup_{i=1}^k g_i \widehat{\Gamma}_n \cong \llbracket 1, k \rrbracket \times \widehat{\Gamma}_n.$$

Posons

$$G = [\Gamma \curvearrowright (\widehat{\Gamma}, \mu_H)].$$

Soit $T \in G$ compatible avec cette décomposition, c'est-à-dire que T agit sur chaque classe $g_i \widehat{\Gamma}_n$ par multiplication à gauche par un élément $h_i \in \Gamma$.

Alors T s'identifie à une application de $[k] \times \widehat{\Gamma}_n$ qui envoie la i -ième copie de $\widehat{\Gamma}_n$ sur la j -ième copie par multiplication à gauche par un élément $\gamma \in \Gamma_n$, où j et γ sont déterminés par la relation

$$h_i g_i = g_j \gamma.$$

Comme ceci vaut en particulier pour les éléments de Γ , on obtient la chaîne d'inclusions

$$\Gamma \leq \Gamma_n^\vee := (\Gamma_n)^k \rtimes \text{Sym}(k) \leq G = [\Gamma \curvearrowright (\widehat{\Gamma}, \mu_H)].$$

En particulier, Γ est contenu dans un sous-groupe discret contenant des éléments dont le support est de mesure $1/k$.

La suite $(\Gamma_n^\vee)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une suite croissante de sous-groupes de G contenant Γ et dont l'union est dense dans G . En effet, étant donné $T \in G$ et $\varepsilon > 0$, on peut choisir n suffisamment grand et un élément $T' \in G$ tel que

$$d(T, T') < \varepsilon,$$

et tel que T' soit compatible avec la décomposition

$$\widehat{\Gamma} = \bigsqcup_{i=1}^k g_i \widehat{\Gamma}_n.$$

L'analyse précédente montre alors que

$$T' \in (\Gamma_n)^k \rtimes \text{Sym}(k).$$

Nous résumons ce résultat dans la proposition suivante.

Proposition 4.13. *Soit Γ un groupe dénombrable résiduellement fini et considérons son action sur sa complétion profinie*

$$\Gamma \curvearrowright (\widehat{\Gamma}, \mu_H).$$

Il existe une chaîne croissante de sous-groupes discrets

$$\Gamma = \Gamma_0 \leq \Gamma_1 \leq \cdots \leq G = [\Gamma \curvearrowright (\widehat{\Gamma}, \mu_H)],$$

dont l'union est dense dans G .

Remarque 4.14. Revenons à l'exemple de groupe MIF élémentairement moyennable mentionné dans la section 3.2.1. Il a également été démontré dans [OOS09] que ce groupe est résiduellement fini.

Ainsi, le groupe plein G de l'unique relation d'équivalence hyperfinie contient deux copies 1-discrètes de Γ :

- l'une est contenue dans un sous-groupe discret maximal par le Théorème 3.5 appliqué au décalage de Bernoulli,
- l'autre est contenue dans une chaîne infinie de sur-groupes discrets dont l'union est dense par la Proposition 4.13 appliquée à l'action sur la complétion profinie.

Références

- [ACTT] Vadim Alekseev, Alessandro Carderi, Andreas Thom, and Robin Tucker-Drob, *About discrete subgroups of full groups of measure preserving equivalence relations*.
- [All66] N.D. Allan, *Maximality of some arithmetic groups* **38** (1966), 223–227.
- [BL04] M. Belolipetsky and A. Lubotzky, *Finite Groups and Hyperbolic Manifolds* (2004).
- [CER93] Leo P. Comerford, Charles C. Edmunds, and Gerhard Rosenberger, *Commutators as Powers in Free Products of Groups*, arXiv, 1993.
- [CFW81] A Connes, Jacob Feldman, and B Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation* (1981), 431–450.
- [Dye59] H. A. Dye, *On Groups of Measure Preserving Transformations. I*, American Journal of Mathematics **81** (January 1959), no. 1, 119, available at 2372852.
- [Dye63] ———, *On Groups of Measure Preserving Transformations. II*, American Journal of Mathematics **85** (October 1963), no. 4, 551, available at 2373108.
- [FM77] Jacob Feldman and Calvin C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I*, Transactions of the American Mathematical Society **234** (1977), no. 2, 289–324.
- [GL09] Damien Gaboriau and Russell Lyons, *A measurable-group-theoretic solution to von Neumann’s problem*, Inventiones mathematicae **177** (September 2009), no. 3, 533–540.
- [Gla03] Eli Glasner, *Ergodic Theory via Joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.
- [HO15] M. Hull and D. Osin, *Transitivity degrees of countable groups and acylindrical hyperbolicity*, arXiv, 2015.
- [Jac19] Bryan Jacobson, *A mixed identity-free elementary amenable group*, arXiv, 2019.
- [Kec10] Alexander Kechris, *Global Aspects of Ergodic Group Actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 160, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer New York, New York, NY, 1995.
- [Khi] A Khintchine, *Eine Verschärfung des Poincareschen Wiederkehrrsatzes* **1**, 177–179.
- [Kur51] Masatake Kuranishi, *On Everywhere Dense Imbedding of Free Groups in Lie Groups*, Nagoya Mathematical Journal **2** (February 1951), 63–71.
- [LS62] R. C. Lyndon and M. P. Schützenberger, *The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group.*, Michigan Mathematical Journal **9** (December 1962), no. 4.
- [OOS09] A. Yu Olshanskii, D. V. Osin, and M. V. Sapir, *Lacunary hyperbolic groups*, arXiv, 2009.
- [Tho13] Andreas Thom, *Convergent Sequences in Discrete Groups*, Canadian Mathematical Bulletin **56** (June 2013), no. 2, 424–433.
- [Wan75] S. P. Wang, *On Subgroups with Property (P) and Maximal Discrete Subgroups*, American Journal of Mathematics **97** (1975), no. 2, 404, available at 2373719.
- [Wei05] Tzer-jen Wei, *Descriptive properties of measure preserving actions and the associated unitary representations*, Ph.D. Thesis, 2005.