Dynamique des groupes polonais non-Archimédiens

I - Flots minimaux universels, moyennabilité et unique ergodicité

II - Rigidité au sens de Stuck Zimmer (avec Joseph)

III - Représentations unitaires (avec Barritault et Joseph)

0) Contexte

$S_\infty = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ munie de la convergence simple

$\hookrightarrow$ groupe Polonais non-localement compact

Exemples d'actions

- $S_\infty \curvearrowright ([0,1]^{\mathbb{N}}, \nu^{\otimes \mathbb{N}})$

- $S_\infty \curvearrowright LO(\mathbb{N})$.
- $S_\infty \curvearrowright \text{Graphes}(\mathbb{N})$, $(Ber(p))^{\otimes \mathcal{P}_2(\mathbb{N})}$

- $G \leqslant_F S_\infty$ est dit non-Archimedien

un tel G est toujours $G = Aut(\mathbb{F})$

où $\mathbb{F}$ est une structure dénombrable homogène

Exemples

- $Aut(\text{Rado})$
- $Aut(\text{graphe sans triangle})$
- $Aut(\mathbb{Q}, <)$
- $Aut(\text{Posets})$

I - Flot minimaux universels, moyennabilité et unique ergodicité.

Def Soit G un gpe Polonais

un flot est une action continue de G sur un compact

- Un flot est minimal si toutes les orbites sont denses

Def / Théorème (Ellis, 60s)

Un groupe polonais G admet un unique FMU

ie $G \curvearrowright M(G)$ flot minimal

tq $\forall G \curvearrowright X$ flot minimal

$\exists$ $M(G) \to X$ continue surj. équivariante

- Souvent, c'est peu exploitable

$\to$ moralement, c'est un objet utile lorsqu'il est métrisable

- Si G est compact
  $G = M(G)$

- Si G loc. compact non compact
  $M(G)$ n'est pas métrisable (Kechris Pestov Todorcevic)

- Peut avoir de l'utilité

Def. G est moyennable si l'un des pts équivalent est satisfait

1) $\forall G \curvearrowright X$ flot, il y a une mesure de proba invariante sur X

2) Pour toute action continue affine de G sur un convexe compact il y a un point fixe

3) $G \curvearrowright M(G)$ admet une mesure de proba invariante.

Deux spécialisations

a) Extrême moyennabilité

$\iff$ $\forall G \curvearrowright X$ flot il y a un pt fixe

b) Unique ergodicité

$\forall G \curvearrowright X$ minimale

$\exists!$ mesure de proba invariante.

$\hookrightarrow$. compacts sont ue

. Localement compact non-compacts

$\to$ jamais (Weiss, J. Zucker)

Exercice Soit G tq $G \curvearrowright M(G)$ a une unique mesure de proba invariante.

montrer que

1) G est moyennable

2) G est uniquement ergodique.

Digression : KPT où comment obtenir un FMU

- Il y a un lien entre extreme moy. et FMU

- Le FMU de G est métrisable ssi $\exists\, G^* \leqslant_f G$ extrêmement moy. tq $M(G) = \widehat{G/G^*}$

- KPT : Il existe des méthodes combinatoires pour montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ est extrêmement moyennable

- $M(S_\infty) = LO(\mathbb{N})$

  $M(\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})) = \{\cdot\}$

- $M(\mathrm{Aut}(\mathrm{Rado})) = LO(\mathbb{N})$
- $M(\mathrm{Aut}(\text{graphe } ST)) = LO(\mathbb{N})$
- $M(\mathrm{Aut}(\mathrm{Poset})) =$ LO qui étendent le poset $(\mathbb{N})$

Théorème (J. Tsankov)

Soit $\mathbb{F}$ (soumis à conditions)$^{\#}$ L'action de

$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}) \curvearrowright LO(\mathbb{N})$ est soit

uniquement ergodique

soit a un point fixe.

- Conditions i) pas d'algebricité

  $\forall A \subset_{\text{fini}} \mathbb{N} \quad \mathrm{Aut}(\mathbb{F})_A \curvearrowright \mathbb{N} \setminus A$ sans pt fixe

  ii) élimine faiblement les imaginaires

  $\forall V \leqslant_{\text{ouvert}} \mathrm{Aut}(\mathbb{F}) \ \exists A$ fini

  tq $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})_A \leqslant V \leqslant \mathrm{Aut}(\mathbb{F})_{\{A\}}$

  iii) est oligomorphe

  $\forall n$ fini $\quad \mathrm{Aut}(\mathbb{F}) \curvearrowright \mathbb{N}^n$ a un nb fini d'orbites.

Element clé de la preuve

Theoreme (J Tsankov)

Si G est sous condition alors G est dissocié.

ie $\forall G \curvearrowright (X,\mu)$ pmp. $\forall A, B \subset \mathbb{N}$ fini

$$\mathcal{F}_A \underset{\mathcal{F}_{A\cap B}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}_B$$

où $\mathcal{F}_C = \{ Y \subset X : \forall g \in G_C \; g \cdot Y \underset{ps}{=} Y \}$

C fini

En particulier, les gpes dissociés verifient les seules mesures de proba inv ergodique de $G \curvearrowright X^{\mathbb{N}}$ sont les mesures produit.

(Theorème de de Finetti)

Conclusion de I

. Question (Angel Kechris Lyons)

Est ce que si G est moyennable et a sont FMU métrisable, G est uniquement ergodique?

. Quid

. et si G est non archimedien

. et si G est sous condition.

II - Stuck - Zimmer (rigidité)

Definition

Un groupe G est Stuck Zimmer rigide si toute action ergodique p.m.p. de G est soit essentiellement libre soit essentiellement transitive.

- Apparait pour les groupes de Lie simples en rang superieur ($SL_n(\mathbb{Z})$ $n \geq 3$)

Theorème (J. Joseph)

Si $G < S_\infty$ propre dissocié alors G est Stuck Zimmer rigide.
 f

Exemples

$G = Aut(\mathbb{Q})$

$G \curvearrowright ([0,1]^{\mathbb{N}}, \lambda)$ pmp ergodique

$\lambda = \nu^{\otimes \mathbb{N}}$

- Si ν est purement atomique
  montrons que l'action est ess. transitive.

- Prenons H_1 et H_2 des variables aléatoires indep
  de loi λ et construisons
  un element de G (aléatoire) envoyant H_1 sur H_2

On va faire un va et vient

Prenons $x_1, \dots, x_n, \dots$
$y_1, \dots, y_n, \dots$
deux enumerations de $\mathbb{Q}$

On construit notre element de G par recurrence
en s'assurant à l'étape n
que $x_1, \dots, x_n$ sont dans son domaine et
$y_1, \dots, y_n$ sont dans son image

etape 1 $H_1(x_1)$ peut prendre un nb dénombrable de valeur

$\exists x_1'$ tq $H_2(x_1')$ a la même cole

x_1' est l'image de x_1

• Si $x_1' = y_1$ ✓

sinon prenons y_1' tq $H_2(y_1) = H_1(y_1')$

$y_1' < x_1$ $\Rightarrow$ tq $y_1' < x_1 \iff y_1 < x_1'$

$y_1 < x_1'$

• Si ν a une partie diffuse H_1 v.a.

$\forall x \neq y \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(\exists g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})\ g \cdot x = y \text{ et } gH_1 = H_1) = 0$

entre x et y il y a une ∞ité de z

en particulier il y en a un z_0 dont la décoration

est dans la partie diffuse

ps, aucun autre elt de $\mathbb{Q}$ n'a la même couleur que z_0

donc tout $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ qui fixe H_1, fixe z_0

$\hookrightarrow$ g n'envoie pas x sur y

Conclusion de II)

Ce résultat a des conséquences sur les sous-groupes aléatoires invariants des groupes sous conditions

• On peut mq les IRS de G sont les

stabilisateurs d'actions pmp.

· Si G est dissocié alors ses IRS ergodique sont essentiellement transitifs.

· Ackerman Freer et Patel
→ $\mathbb{F}$ n'a pas d'algebricité
ssi il y a un IRS ergodique de S_∞ sur la classe de conj de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$

III – L'espace d'Urysohn rationel (et des representations unitaire)

$\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ La limite de Fraïssé des espaces métriques à distances rationelles.

↳ pas oligomorphe

↳ Contient des espaces métriques oligomorphes

$\mathbb{U}_{\{1,\dots,n\}}$ → oligomorphe

On peut utiliser la dissociation des plus petits espaces métriques pour montrer que $\mathrm{Isom}(U_{\mathbb{Q}})$ est aussi dissocié.

Grâce à Rémi Barritault on obtient en fait la classification des représentations unitaire de $\mathrm{Isom}(U_{\mathbb{Q}})$

→ et on peut en fait réécrire la notion de dissociation en termes de représentation

→ $\mathrm{Isom}(U_{\mathbb{Q}})$ a la propriété (T)

Conclusion de III

Mais tout n'est dissocié.

Théorème (J Perruchaud)

Il existe $G \leqslant_f S_\infty$ sans algébricité éliminant faiblement les imaginaires

et qui n'est <u>pas</u> dissocié.