Cellules denses dans l'espace de Kechris de la relation d'équiv pmp ergodique hyperfinie

① Espace de Kechris

Cadre : (X,μ) proba standard $(\simeq([0,1], \mathrm{Leb}))$

Γ gp dnb $\rightsquigarrow$ $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ pmp (ou non-singulière : $\forall \gamma \in \Gamma, \alpha(\gamma)_* \mu \sim \mu$

$\forall A \subseteq X$ $\mu(\gamma^{-1}(A)) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0)$

ex : $\Gamma \curvearrowright (\{0,1\}^\Gamma, \frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)^{\otimes\Gamma})$

$\gamma(x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma}$

On associe à une telle act° une relat° d'équivalence pmp (ou non singulière)

$R_\alpha := \{(x, \alpha(\gamma)x) : x \in X, \gamma \in \Gamma\}$

Fait : Toute sous relat° d'équiv d'une relat° d'équiv pmp est pmp.

Déf : L'espace de Kechris de R pmp est $\{S \subseteq R : S$ est une sous-rel d'équivalence de $R\}$

$= \mathrm{Sub}(R)$

On va définir une topologie tq : si

$\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ et α est libre ($\forall x$, $\Gamma \to \alpha(\Gamma)x$, $\gamma\in\Gamma \mapsto \alpha(\gamma)x$ est bijective)

$\mathrm{Sub}(\Gamma) \subseteq \{0,1\}^\Gamma \longrightarrow \mathrm{Sub}(R_\alpha)$

$\hookrightarrow$ sous-groupes de Γ

$\Lambda \longmapsto R_{\alpha_{\restriction\Lambda}}$

est un homéo sur son image.

Généralités sur les alg de mesure

Soit (Y,ν) un espace de proba on déf l'algèbre de mesure

$\mathrm{MAlg}(Y,\nu) = \{A \subseteq Y \text{ mesurable}\} / A \sim_\nu B$ si $\nu(A\Delta B) = 0$

$\hookrightarrow$ ne dépend que de ν à équivalence près

$MAlg(Y,\nu)$ est muni de la topologie donnée par la distance

$$d_\nu(A,B) = \nu(A \Delta B)$$

Cette topo ne dépend de ν qu'à équivalence près

En effet, soit $\eta \sim \nu$ $\quad (\nu(A)=0 \Leftrightarrow \eta(A)=0)$

alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tq
$\forall A \subseteq X, \quad \nu(A) < \delta \Rightarrow \eta(A) < \varepsilon$
$(\text{et } \eta(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon)$

donc d_ν et d_η sont uniformément équivalentes

supposons que non ; $\forall \delta > 0 \ \exists A /$
$\nu(A) < \delta$ mais $\eta(A) \geq \varepsilon$

$\rightsquigarrow \exists (A_n) / \ \nu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ et $\eta(A_n) \geq \varepsilon$

alors $\limsup A_n \left(= \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m\right)$ satisfait :

$\nu(\limsup A_n) = 0$ mais $\eta(\limsup A_n) \geq \varepsilon$ $\lightning$ $\square$

Thm : d_ν est complète.

Pr : (A_n) de Cauchy, suffit de mq elle a une sous-suite cv.
Quitte à prendre une sous-suite, $\forall n$, $\nu(A_n \Delta A_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$

$\rightarrow \nu(\limsup A_n \Delta A_{n+1}) = 0$

$\rightarrow$ à mesure nulle près $\limsup A_n = \liminf A_n \left(= \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} A_m \right)$
et on vérifie que $\lim_{n \to +\infty} A_n$ $\square$

En particulier si $A_n \to A$ alors (A_n) admet une sous suite $(A_{\varphi n})$ telle que $A = \liminf A_{\varphi n}$

De plus si (Y,ν) est standard, $MAlg(Y,\nu)$ est séparable : c'est donc un espace polonais

Pr : $Y = [0,1]$, $\nu = \text{Leb}$
Les réunions finies d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles sont denses $\square$

Rmq : si λ est une mesure σ-finie infinie sur Y alors
on définit $MAlg(Y,\lambda) = \{A \subseteq Y\} / A \sim B$ si $\lambda(A \Delta B) = 0$

muni de la topologie induite par d_ν où ν est une proba $\sim \lambda$

↳ indép du choix de ν.

(ν existe : $Y = \bigsqcup_n Y_n$ ↓ de mesure finie

$$\nu(A) = \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\lambda(A \cap Y_n)}{\lambda(Y_n)} \quad)$$

Soit maintenant R rel d'éq pmp sur (X, μ) ($R \subseteq X \times X$ est borélien)

Alors R est munie de la mesure M suivante :

$$M(A) = \int_X |A_x| \, d\mu(x)$$

↳ $A_x := \{ y \mid (x,y) \in A \}$

Rmq : Si $\gamma \in \Gamma$, on identifie $\alpha(\gamma)$ à son graphe $\{(x, \alpha(\gamma)x) : x \in X\}$

et $M(\alpha(\gamma)) = \int_X 1 = 1 \rightsquigarrow M$ est σ-finie car $R = \bigcup_\gamma \alpha(\gamma)$

Mieux, si $B \subseteq X$,

$$M(\alpha(\gamma)_{\restriction B}) = \int_B 1 = \mu(B)$$

et si on pose $M'(A) = \int_X |A^x| \, d$,

$A^x = \{ y : (y,x) \in A \}$

$$M'(\alpha(\gamma)_{\restriction B}) = \mu(\alpha(\gamma)(B))$$

$\rightsquigarrow$ si R pmp $M = M'$ (si R non singulière $M \sim M'$)

Déf : La topologie de Kechris sur $\mathrm{Sub}(R)$ est la topo induite par $\mathrm{MAlg}(R, M)$

Thm (Kechris) Cette topologie est polonaise ($\Leftarrow$ séparable + admet une distance compatible complète)

car $\mathrm{Sub}(R)$ est fermé dans $\mathrm{MAlg}(R, M)$

si $m \sim M$ ↓ proba

d_m est complète sur $\mathrm{MAlg}(R, M)$

Pr : Une liminf de rel d'éq est une rel d'éq ($R_n \to A$ quitte à prendre ss-suite $A = \liminf R_n$)

$$\liminf R_n = \underbrace{\bigcup_n \bigcap_{m \geq n}} R_m \qquad \Pi$$

Rmq : Γ dnbl, M = comptage sur Γ,

alors la topo de $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ est induite par celle de $\mathrm{MAlg}(\Gamma, M) \cong \{0,1\}^\Gamma$

Hyperfinitude dans l'espace des sous relat°

Déf : Une rel d'éq pmp S est finie si toutes ses classes sont finies.
R est hyperfinie si elle peut s'écrire comme réunion croissante de sous-relations finies.

Déf : R pmp est ergodique si $\forall A \subseteq X$ réunion de R-classes, $\mu(A) = 0$ ou 1)

Thm (Dye) Toutes les rel d'éq R_1, R_2 pmp ergodiques hyperfinies sont isomorphes : $\exists \varphi : X \to X$ bij pmp $\varphi \times \varphi(R_1) = R_2$

Thm (Ornstein-Weiss, Connes-Feldman-Weiss)
Soit Γ dénombrable moyennable, $\alpha : \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ pmp
alors R_α est hyperfinie

De plus, si Γ dénombrable quelconque agit librement
alors R_α est hyperfinie $\Leftrightarrow$ Γ moyennable

Thm (Kechris) || $\mathrm{Sub}_{hyp}(R)$ est fermé dans $\mathrm{Sub}(R)$
(R pmp)

Pour prouver ça on s'appuie sur : (1) Toute sous rel d'une rel hyperfinie est hyperfinie (OK)

(2) Toute réunion croissante d'hyperfinies est hyperfinie (à mesure nulle près !)

Pv du thm à partir de (1) et (2)

Si $R_n \to R$, $\quad R = \liminf R_{k_n} = \underbrace{\bigcup_n \underbrace{\bigcap_{m \geq n} R_{k_m}}_{\text{hyp par (1)}}}_{\text{hyp par (2)}}$ $\square$

Voyons pourquoi (2) est vraie :

Déf : R est bornée si elle est finie et $\exists n \in \mathbb{N} \,/\, \forall x, |[x]_R| \leq n$.

Thm : (version de Dye de l'hyperfinitude)
R est hyperfinie ssi $[R]$ est approx fini :
$\forall \varepsilon > 0$, $\forall T_1, \dots, T_n \in [R]$,
$\exists S \in \mathrm{Sub}(R)$ finie tq
$\forall i \in \{1, \dots, n\}$,
$\mu\{x \in X, (x, T_i(x)) \in S\} \geq 1 - \varepsilon$

Pv : $\Rightarrow)$ $R = \bigcup_n S_n \to$ finie
suffit de prendre $S = S_n$, n assez grand
$\Leftarrow$: Supposons $[R]$ approx fini.
Alors dans la déf, OPS S bornée
$(S = \bigcup_n S_n$ où $S_n = \{(x, y) \in S \,/\, |[x]_S| \leq n\}$

Déf : $[R] = \{T : X \to X$ bij $\forall x \in X, (x, T(x)) \in R\}$
groupe plein de R rel d'éq pmp

Si $R = R_\alpha$, $\alpha(\Gamma) \leq [R_\alpha]$
si α est non triviale
soit $\gamma \in \Gamma$, $A \subseteq X$ tq
$A \cap \alpha(\gamma) A = \emptyset$

$$I_{\gamma, A}(x) = \begin{cases} \alpha(\gamma) x & \text{si } x \in A \\ \alpha(\gamma)^{-1} x & \text{si } x \in \alpha(\gamma) A \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$
$\rotatebox{90}{$\in$}$ $[R]$

NB : les élts de $[R]$ préservent μ.

Exo : $T \in [R]$ ssi
$\exists$ partit° $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de X
tq $\forall \gamma$, $T_{\restriction A_\gamma} = \alpha(\gamma)_{\restriction A_\gamma}$

Lemme clé : Etant donnée $R_0 \in \mathrm{Sub}(R)$ bornée et $\varepsilon > 0$, et $T \in [R]$,
on peut trouver $S \in \mathrm{Sub}(R)$ bornée
tq $\boxed{R_0 \subseteq S}$ et
$\mu(\{x \mid (x, T(x)) \in S\}) > 1 - \varepsilon$.

$R = R_\Gamma \to \Gamma = \{\gamma_n\}$,
$T_n = \alpha(\gamma_n)$
On réindexe (T_n) de sorte que $\forall \gamma \in \Gamma$, $\exists \infty\, n$ tq $\alpha(\gamma) = T_n$
On prend $\varepsilon_n \to 0$. On itère le lemme clé en partant de $R_{-1} = \Delta_X$
$\to R_0$ qui contient T_0 à ε_0 près
$\xrightarrow{\text{lemme clé}} R_0 \subseteq \underline{R_1}$ qui contient T_1 à ε_1 près

preuve du lemme clé : Soit T_0 tq $R_0 = R_{T_0}$. Prenons $\delta > 0$, Soit n le nombre des R_0-classes

On applique approximative finitude à T, T_0, δ

$\rightsquigarrow \mathcal{S}$ bornée et $\mu(\{x \mid (x, T(x)) \in \mathcal{S}\}) > 1-\delta$

$\mu(\{x \mid (x, T_0(x)) \in \mathcal{S}\}) > 1-\delta$

$B = \{(x, T(x)) \in \mathcal{S}$ et $(x, T_0(x)) \in \mathcal{S}\}$, $\mu(B) > 1-2\delta$

$C = \bigcap_{i=0}^{n-1} T_0^i(B)$ alors $\mu(C) > 1-2n\delta$

et C est R_0-invariant

Soit $D = C \cap T^{-1}(C)$, $\mu(D) > 1-4n\delta$

soit $\mathcal{S}'$ la rel d'éq engendrée par R_0 et $T_{\restriction D}$

alors $\mathcal{S}'_{\restriction C} \subseteq \mathcal{S}_{\restriction C}$ et $\mathcal{S}'_{\restriction X \setminus C} = R_{0 \restriction X \setminus C}$

et $R_0 \subseteq \mathcal{S}'$

donc $\mathcal{S}'$ est comme voulu $\square$