P, PPP, PC et FA

Aurelia DESHAYES

Percolation, Percolation de Premier Passage, Processus de Contact, Forme Asymptotique

$G = (V, E)$ → infection qui touchent les sites de V se propagent par les arêtes de E

0. Percolation

Broadbent et Hammersley '57

$\# V = \infty$ G connexe, vertex-transitif

$(w_e)_{e \in E}$ i.i.d à valeurs $\{0,1\}$ $Ber(p)$

$w_e = 1$ ac proba p → on garde e

$w_e = 0$ ac proba $1-p$ → on efface e

| $G = \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{T}^d$ arbre régulier

espace de proba $(\Omega = \{0,1\}^E, \mathbb{P}_p, \mathcal{F})$

→ on obtient un sous graphe aléatoire de G

Q° $\exists$? une composante connexe infinie

$A = \{\exists \text{ c. c. } \infty\}$

ref = cours SMF, Werner, Percolation

Thm Transition de phase $\exists p_c \in [0,1]$ tq

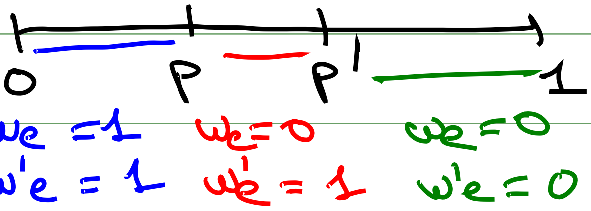
- $p < p_c$ $\mathbb{P}_p(\exists \text{ c.c} \infty) = 0$
- $p > p_c$ $\mathbb{P}_p(\exists \text{ c.c} \infty) = 1$

$p = p_c$?

preuve ① $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 A invariant par translation

② $p \to \mathbb{P}_p(A)$ ↗

couplage : $p<p'$ $\qquad e\in E \to U_e \sim \mathcal{U}([0,1])$



Thm $\quad p_c \neq 0$ ou 1 si $\deg > 2$ $\qquad \mathbb{Z}^d$ $d\geq 2$

$\mathbb{T}^d$ $d>2$

preuve • "$0 \leftrightarrow \infty$" $\qquad \mathbb{P}(0\leftrightarrow\infty)=0$

$$\mathbb{P}(0\leftrightarrow\infty) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(0 \overset{>0}{\leftrightarrow} \text{"}n\text{"})$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (\deg-1)^n\, p^n$$

si $p<\dfrac{1}{\deg-1}$ $\qquad \mathbb{P}(0\leftrightarrow\infty)=0 \quad \to p_c\neq 0$.

• $p_c \neq 1$ sur $\mathbb{Z}^2$ $\quad \mathbb{P}(0 \not\leftrightarrow \infty) \leq \mathbb{P}(\quad)$ $\quad 0 \leadsto \infty$

$1-p < \dots \qquad \mathbb{P}(0 \not\leftrightarrow\infty)=0 \qquad \leq \dots (1-p)^{cn}$

Résultats

80

• $p_c(\mathbb{Z})=1$ $\qquad \mathbb{P}_1(\exists\, c.c.\infty)=1$

• $p_c(\mathbb{Z}^2)=\frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\exists\, c.c\infty)=0$

• $p_c(\mathbb{Z}^d)=?$ $\qquad \mathbb{P}_{p_c}(\exists\, c.c.\infty)=?$

$d=3,4,5$

Dans $\mathbb{Z}^d$, $p>p_c$, Unicité de la c.c ∞.

1) $\mathbb{P}(\#\, c.c\ \infty = k)=1$

2) $k=1$ ou ∞

3) dans $\mathbb{Z}^d$ $\qquad k\neq\infty \Rightarrow k=1$

dans $\mathbb{T}^d$ $\qquad k=\infty$

Benjamini Schramm '96

moyennable quasi-transitif $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $p_c=p_u$

1. Percolation de Premier Passage

Hammersley - Welsh '65

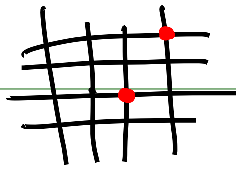
ref Auffinger - Damron - Hanson '15

$e \in E \to t_e$ = v.a à valeurs $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

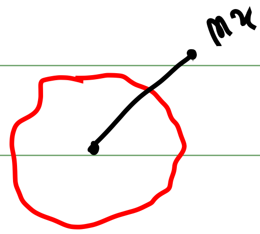
(t_e) iid de loi ν $\quad E(\nu^2) < +\infty$

γ : chemin $e_1 \dots e_n$

$$t(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} t(e_i)$$



$$d(x,y) = \min_{\gamma : x \to y} t(\gamma)$$



$d(0,x) \geq 0$

$d(0,x) \leq t_1 + \dots + t_{\|x\|_1}$

$E(d(0,x)) \leq E(\nu) \|x\|_1 \qquad x \in \mathbb{Z}^d$

$0 \leq E(d(0,nx)) \leq n\|x\|_1 E(\nu)$

$*\ d(0,(n+p)x) \leq d(0,nx) + d(nx,(n+p)x)$

$\leq d(0,nx) + d(0,px) \circ \Theta_x^n$

<u>th^m ergodique sous additif Kingman</u> '68

$\exists\, \mu(x) \geq 0 \ / \ \dfrac{d(0,nx)}{n} \to \mu(x)$ p.s. L^1

$\mu(x) = \lim_{n \to \infty} E\left(\dfrac{d(0,nx)}{n}\right)$

<u>μ norme</u>

$0 \leq \mu(x) \leq \|x\|_1 E(\nu) \quad *$

$\mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y)$

$\mu(-x) = \mu(x)$

$\mu(nx) = n\mu(x)$

$\mu(x)=0 \Rightarrow x=0$ $\qquad$ $d(0\,nx) \simeq n\mu(x)$

$\nu(\mathbb{R}^-)=0$

$\forall p<1 \ \exists \alpha \quad \nu([\alpha,+\infty[) \geq p$

$\Lambda_t = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid d(0,x) \leq t\}$

$B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d \quad \|x\|_\infty \leq t\}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(B_t \not\subset \Lambda_{\frac{2}{\alpha}t}\right) \leq e^{-ct} \\ \mathbb{P}\left(d(0,nx) < \frac{\alpha}{2} n\|x\|\right) \leq e^{-cn\|x\|} \end{cases}$

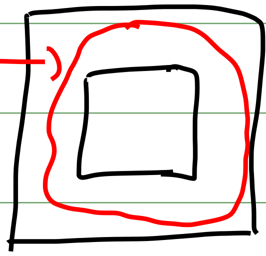
$\Longrightarrow \mu(x) \geq c\|x\|$

Thm de Forme Asymptotique

$\exists \mu$ norme tq $\forall \varepsilon>0$ pour $t \geq t_0$

$$(1-\varepsilon)tB_\mu \subset \Lambda_t \subset (1+\varepsilon)tB_\mu.$$

B_μ



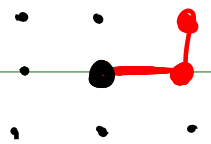
$\rightarrow$ on sait rien sur μ.

$\rightarrow$ PPP $\rightarrow$ sous additivité

$\rightarrow$ ou $\ominus$ linéarité

$\rightarrow$ ou $\oplus$ linéarité $\rightarrow$ "exacte" linéarité

2. Processus de contact   Harris '74



$(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$

$x\in\mathbb{Z}^d$

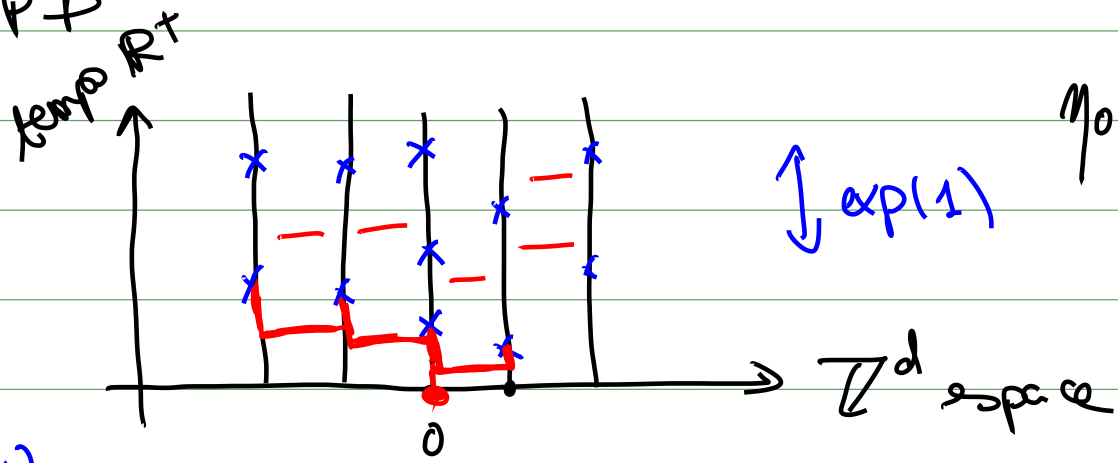
$\eta_t(x) = 0$ si x est sain

$ = 1$ si x infecté.

$1 \to 0$ à taux 1

$0 \to 1$ à taux $\lambda \times \#$ voisins infectés

$\to$ PPP

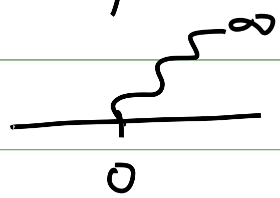


PPP(1)

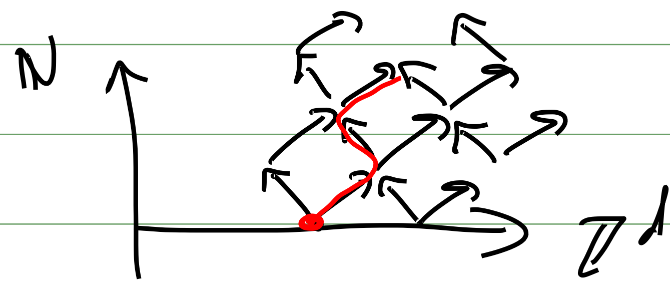
PPP(λ)

q° : infection survit-elle à proba >0 ?

$\mathbb{P}(\forall t \ \ \eta_t \neq \emptyset) > 0$?

$\mathbb{P}\Big($  $\Big) > 0$

percolation orientée



Propriétés

- le PC est attractif (monotone en la config initiale)

$A \subseteq B \Rightarrow \eta_t^A \subseteq \eta_t^B$

• le PC est additif

$$\eta_t^{A\cup B} = \eta_t^{A} \cup \eta_t^{B}$$

• le PC est monotone / paramètre λ

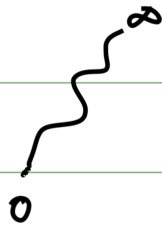
$\lambda \leq \lambda'$ $\qquad \eta_t \subseteq \eta_t'$

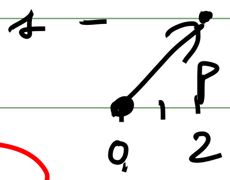
$\lambda \to \mathbb{P}_\lambda(\text{survie}) \nearrow$

<u>Transition de phase</u> $\quad \exists\, 0 < \lambda_c < \infty$

• si $\lambda < \lambda_c$ $\quad \mathbb{P}(\text{survie}) = 0$

• si $\lambda > \lambda_c$ $\quad \mathbb{P}(\text{survie}) > 0$





Bezuidenhout-Grimmett '90

$\rightarrow$ $\lambda = \lambda_c \quad \mathbb{P}(\text{survie}) = 0$ $\qquad \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$

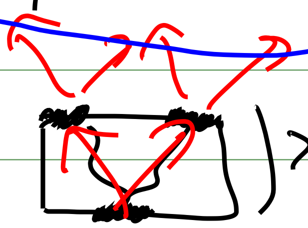
$\rightarrow \lambda < \lambda_c \qquad \mathbb{Z}^d \rightarrow$ compris

$\rightarrow \lambda = \lambda_c \qquad$ " ? "

$\rightarrow \lambda > \lambda_c \qquad \mathbb{P}(\forall t \ \eta_t \neq \emptyset) > 0$

$$A_t = \{x \in \mathbb{Z}^d,\ \eta_s(x) = 1,\ s \leq t\}$$

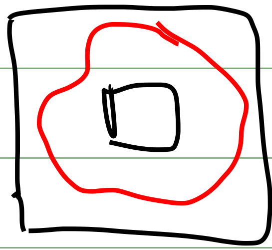
$\rightarrow$ au $\oplus$ linéaire = ok $\qquad \mathbb{P}(A_t \not\subset B_{Mt}) \leq e^{-ct}$

$\rightarrow$ au $\ominus$ linéaire = $\qquad \mathbb{P}\Big($  $\Big) > 1-\varepsilon$ tps espace

$$\mathbb{P}(B_{mt} \not\subset A_t) \leq e^{-ct}$$

$$\mathbb{P}(t < \underset{\text{survie}}{\text{tps}} < +\infty) \leq e^{-ct}$$

$t(x) = \inf\{t \mid \eta_t(x) = 1\}$

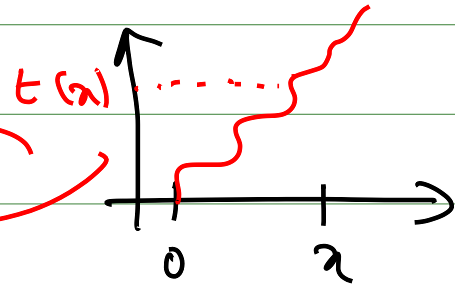


$t((n+p)x)$

$\le t(nx) + t(px)\circ\theta$

$\uparrow$

$\theta_{nx,\,t(nx)}$

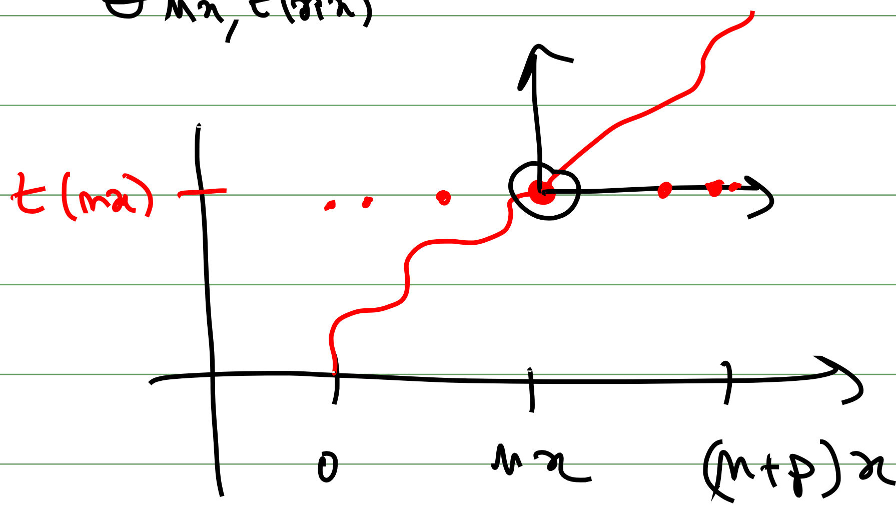


attractivité

Markov

→ stationnarité

→ intégrable



$t(x) = \infty$

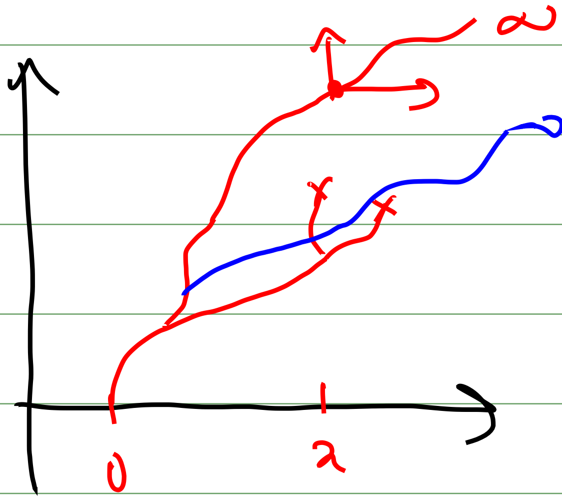
Conditionné à {survie} $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\quad \mid \text{survie})$

tps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$

→ intégrabilité

→ stationnarité

→



$\sigma((n+p)x) \le \sigma(nx) + \sigma(px)\circ\theta_{\sigma(nx),\,nx}$

+ quantité

thm presque sous additif Kesten – Hammersley '74

→ TFA pour "σ" → TFA pour t

→ Markov
→ "renewal contact process"
→ attractivité ??
→ additivité ??