More ergodic prop of Poisson bd.

G lc à base dé $\mathbb{N}$, $G \curvearrowright (A, \eta)$ non-singulière

D: $G \curvearrowright (A,\eta)$ préserve la mesure

Soit $\mathcal{X}$ un espace topologique polonais $G \curvearrowright \mathcal{X}$

$p : \mathcal{X} \to A$ mesurable.

p admet une action isométrique fibrée si il existe une application

$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ G-invariante, Borel et dq

$d_a : \mathcal{X}_a \times \mathcal{X}_a \to \mathbb{R}$ est une métrique séparable , $\mathcal{X}_a = p^{-1}(\{a\})$

$\to d_{ga}(gx, gy) = d_a(x,y)$.

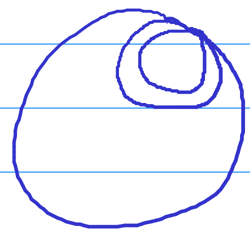
Ex: Horosphères

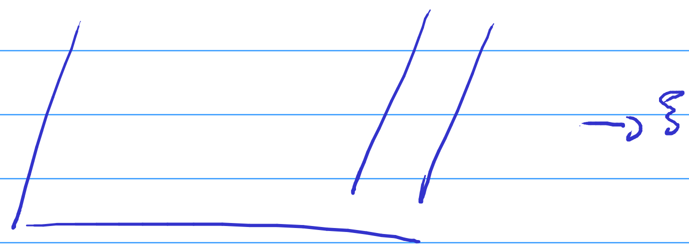
X espace CAT(0) ∂X bord visuel (X complet séparable)

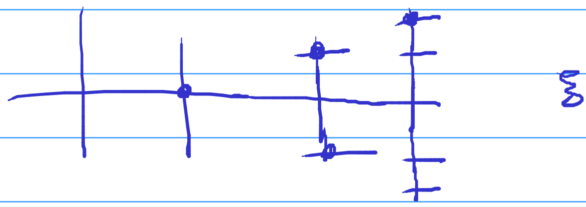
Busemann $\beta_\xi(z,o) = \lim_{x \to \xi} d(z,x) - d(x,o)$, $\xi \in \partial X, o \in X$

$\mathrm{Hor}(X) = \{ \mathrm{Hor}_\xi(t) : \xi \in \partial X, t \in \mathbb{R} \}$.

$\{ z \in X \mid \beta_\xi(z,o) = t \}$.







$\mathrm{Hor}(X) \to \partial X$ $\qquad G \curvearrowright \mathrm{Hor}(X)$.

$\mathrm{Hor}_\xi(t) \mapsto \xi$.

$$c : \Gamma \times \partial X \to \mathbb{R}$$
$$(\gamma, \xi) \mapsto \beta_\xi(\gamma_0, o).$$

$\gamma \,\mathrm{Hor}_\xi(t) = \mathrm{Hor}_{\gamma\xi}(t + c(\gamma, \xi))$

$$\begin{array}{c} G \curvearrowright \mathrm{Hor}(X) \\ \downarrow \\ G \curvearrowright \partial X \end{array}$$

$d_\xi(\mathrm{Hor}_\xi(t), \mathrm{Hor}_\xi(t')) = |t - t'|.$

D : On dit qu'une application Γ-eq mesurable $q : B \to S$ est relativem^t isom^t ergodique si pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} {}^{\Gamma}\!\curvearrowright B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & {}^{\Gamma}\!\curvearrowright X \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[r, "f_0"'] \arrow[ur, dashed, "f_1"] & (A, \nu) \end{tikzcd}$$

mes Γ-eq

où $p : X \to A$ admet une action isom fibrée, il existe $f_1 : S \to (A, \nu)$ Γ-eq mesurable

(Bader-Furman '14)

T : Soit $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$ admissible. Notons (B_+, ν_+) et (B_-, ν_-) les bords de Poisson-Furst associés à μ et $\check{\mu}$ ($\check{\mu} = \iota_* \mu$, $\iota(g) = g^{-1}$). Alors $\pi_\pm : B_+ \times B_- \to B_\pm$ sont rel^t isom ergodiques.

C : (Kaimanovich '03)

Si μ est symétrique ($B_+ = B_-$). Alors $G \curvearrowright B \times B$ est isométriquement ergodique

P : $f : B \times B \to (X, d)^{\curvearrowleft G}$

$$\begin{tikzcd} B \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & (X,d) \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (A, \nu) \end{tikzcd}$$

f ne dépend pas de la 2nde coordonnée.

Idem $\pi_2 : B \times B \to B$

$\Rightarrow f$ constante $\square$

D: On dit qu'un G-espace (S,η) est un bord fort si
1) $G \curvearrowright (S,\eta)$ est Zimmer moyennable : $\forall G \curvearrowright M$ compact par Homéo, il existe une application G-eq $S \to Prob(M)$.
2) $G \curvearrowright (S,\eta)$ est doublement non ergodique

C: μ sym adm sur G. $G \curvearrowright (B_\mu, \nu_\mu)$ est Z-moyennable [Z1978]
$\Rightarrow \forall G$ tq $\exists$ bord de Poisson non trivial, G admet un bord fort non trivial

L: Soit (A,η) un $(G,\check{\mu})$-espace $(\check{\mu} * \eta = \eta)$. Soit $E \subseteq A \times B_+$ de mesure $\eta \otimes \nu_+$-positive. Alors pour presque tout $a \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g$
1) (SAT) $\nu_+(g E_a) > 1-\varepsilon$, $E_a = \{ b_+ \in B_+ \mid (a,b_+) \in E \}$
2) (Poincaré récurrence) $ga \in \Pi_A(E)$.

P: $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, P = \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ $\Omega \to B_+$
$\tilde{\Pi} : A \times \Omega \to A \times B$
$\tilde{T}(a,\omega) = \tilde{T}(a, \omega_1, \omega_2, \dots) = (\omega_1^{-1} a, \omega_2, \dots \omega_n, \dots)$
$= (\omega_1^{-1} a, S\omega)$
Puisque A $(G,\check{\mu})$-espace $\tilde{T}$ préserve $\eta \otimes P$.
$\tilde{E} = \tilde{\Pi}^{-1}(E) \Rightarrow \forall \tilde{e} \in \tilde{E}, \exists \infty\, n$ tq $\tilde{T}^n \tilde{e} \in \tilde{E}$ (récurrence de Poincaré)
D'autre part, par Fubini, pour η pt $a \in \Pi_A(E)$, $\nu_+(E_a) > 0$.
Soit $a = \tilde{\Pi}_A(\tilde{e})$, pour $\tilde{e}$ dans l'intersection de ces deux ensembles de mesure pleine :
$\mathbb{1}_{E_a} \in L^\infty(B_+, \nu_+)$
$$\Phi(\mathbb{1}_{E_a})(g) = \int_{B_+} \mathbb{1}_{E_a}\, d g_* \nu_+ = \nu_+(g^{-1} E_a).$$
$$\Phi(\mathbb{1}_{E_a})(Z_n(\omega)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{1}_{E_a}(\mathrm{bnd}(\omega))$$
Soit $\omega \in \tilde{E}_a$, $\Phi(\mathbb{1}_{E_a})(Z_n(\omega)) = \nu_+(Z_n(\omega)^{-1} E_a) \to 1$

$\forall \varepsilon, \exists n_0 : \nu_1(Z_n(\omega)^{-1} F_a) > 1-\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Réc de Poincaré $Z_n^{-1} a \in \Pi_A(E)$

$$\tilde{T}^n(a,\omega) = (Z_n(\omega)^{-1} a, S^n \omega) \qquad \square$$

R: * Γ gp Gromov hyp, μ admissible (+ hyp moment) alors si Γ est non-élémentaire, $\partial_G \Gamma$ est un modèle topologique du bord de Poisson de (Γ, μ) Kai00

* G gp alg semisimple sur un corps local (ex $SL_d(\mathbb{R})$) $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$ admissible. Alors G/P est un modèle top de $B(G,\mu)$

P parabolique minimal

$SL_d(\mathbb{R})/P_N \cong \tilde{F}_d = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{d-1} \subsetneq \mathbb{R}^d\}$, $P = \begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$

* Si $\{G_i\}_{i=1}^N$ B_i des bords forts de G_i

Alors $\prod B_i$ est un bord fort pour $\prod G_i$

P: Si $\Gamma < G$ réseau et $G \curvearrowright (S,\eta)$ est isométriquement ergodique, alors $\Gamma \curvearrowright (S,\eta)$ est isométriquem^t ergodique

C: les bords forts passent aux réseaux.

p: $\phi : \overset{\Gamma\curvearrowright}{S} \to \overset{\Gamma\curvearrowright}{(X,d)}$ Γ-eq mesurable. Supposons d est bornée

$\mathrm{Map}(G,X)^\Gamma$,

$$D(\alpha,\beta) = \int_{G/\Gamma} d(\alpha(x), \beta(x))\, dx$$

$\Psi : \overset{G\curvearrowright}{S} \to \overset{G\curvearrowright}{\mathrm{Map}(G,X)^\Gamma}$ essentiellement constante

$a \mapsto g \mapsto \phi(ga)$ $\square$

Groupes de Weyl généralisés

D: (B,ν) un G-bord

Le groupe de Weyl généralisé est $W_{G,B} = \mathrm{Aut}_G(B \times B, \nu \otimes \nu)$

Ex : • Si (B, ν) est non trivial

$(b,b') \in B \times B \longmapsto (b',b) \in W_{G,B}$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leq W_{G,B}$.

* $G = \prod_{i=1}^{N} G_i$, B_i G_i-bord fort non trivial

Alors $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N \leq W_{G,B}$

* G est semisimple algébrique. $(B = G/P, \nu)$

$W_{G,B} = W_0$, W_0 groupe de Weyl de G (fini)

Soit T un tore maximal $\leq P$. $W_0 = N(T)/Z(T)$

Pour $SL_d(\mathbb{R})$, $T = \{\mathrm{Diag} \in SL_d(\mathbb{R})\} = Z(T)$.

$N = \{$ matrices monomiales $\in SL_d(\mathbb{R})\}$

$N/Z(T) = S_d$

Correspondance de Galois

$W_\phi \leq W_{G,B} \longleftrightarrow \phi : B \to (S,\eta)$ G-equivariant

$Q(B) = \{G\text{-quotients de } B\}$

$\mathrm{Sub}(W_{G,B}) = \{$sous-groupes fermés de $W_{G,B}\}$

$p_1 : B \times B \to B$

Soit $\phi : B \to (S,\eta)$

$W_\phi = \{ w \in W_{G,B} \mid \phi \circ p_1 \circ w = \phi \circ p_1 \}$

$$\begin{tikzcd}
B \times B \arrow[d, "w"] \arrow[dr, "p_1"] & & \\
B \times B \arrow[r, "p_1"'] & B \arrow[r, "\phi"'] & S
\end{tikzcd}$$

Si $S = \{*\}$, $W_\phi = W_{G,B}$. $S = B$, $W_\phi = \{e\}$.

Si $U < \mathcal{W}_{G,B}$ $\qquad f \in p_1^{-1}(L^\infty(B))$

$\mathcal{N}_U = \{ f \in L^\infty(B \times B) \mid f$ ne dépend que de la première coordonnée et $f \circ u = f$ ps $\forall u \in U \}$.

$\to \mathcal{N}_U$ sous-alg de vN fermée de $L^\infty(B \times B)$ G-inv

Mackey $\exists (S, \eta)$ $\phi : B \times B \to S$ tq $\mathcal{N}_U = \phi^*(L^\infty(S, \eta))$.

$\phi : B \to S$. car ne dépend que de la première coord

$\mathcal{V} : \mathrm{Sub}(\mathcal{W}_{G,B}) \to \mathcal{Q}(B)$

$\mathcal{W} : \mathcal{Q}(B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathcal{W}_{G,B})$

Applications de bord vers des immeubles

T : Si Γ est un réseau d'un gp de L'e simple de rang supérieur

Alors toute action de Γ sur un arbre a un point fixe

Conj (Farb) : Si $\Gamma < G$ réseau ds un gdL simple de rang $r \geq 2$

Alors Γ n'admet pas d'action sur un complexe simplicial CAT(0) de dim $\leq r - 1$. (FA_r) non-élémentaire

T : (Farb)

Vrai pour réseau non unif + cond°

T : (BBB Sauer)

Resolution complète.

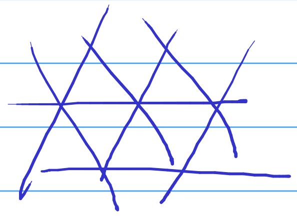
T : (LcB)

Si X est un immeuble affine exotique. Alors c'est vrai

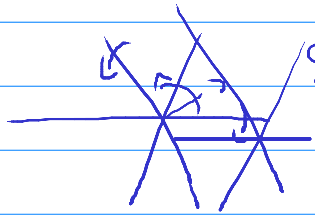
Si X est de type $\tilde{A}_2$ $\Gamma < G_1 \times G_2$. Alors toute action non-élim se factorise par un des facteurs $\pi_i : G \to G_i$

Pareil pour 3 facteurs dans $\tilde{C}_2$, $\tilde{G}_2$.

Immeubles

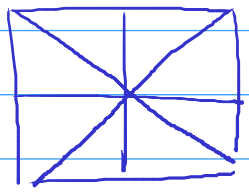


+ recollements le long des murs $\tilde{A}_2$

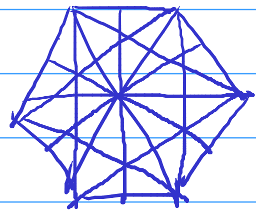


S_3

$W = T \rtimes S_3$



$\tilde{C}_2$



$\tilde{G}_2$

R : G g alg réductif corps $\mathbb{K}$ non-arch $\xrightarrow{\text{Bruhat-Tits}}$ Immeuble affine

$\longleftarrow$ vraie pour dim ≥ 3

en dim 2, $\exists \infty$ immeubles exotiques

$\to$ non-linéaires

$\to$ groupes simples qui agissent sur $\tilde{C}_2$

Tits-Witte-Weitzel

$\left[G \curvearrowright (X,d) \quad B \times B \to \partial X^{(2)} \right]$

$\Gamma < G_1 \times G_2$, B Γ-bord

$\Gamma < G \longrightarrow H$

$\exists !\, B \longrightarrow \mathcal{R}(X^\infty)$.

$G/P_G \longrightarrow H/P_H$

$$B \times B \longrightarrow \mathcal{R}(X^\infty)^2$$

$G/P \times G/P \longrightarrow H/P_H \times H/P_H$

$W_G \curvearrowright G/Z_G \qquad W_H \curvearrowright H/Z_H$

$W/_{G,B} \longrightarrow S_3$

ne peut pas avoir de noyau (Tits)