A propos des sous-groupes discrets dans les groupes pleins des rel° d'equivalence pmp

Alekseev, Carderi, Thom, Tucker-Drob (2024):

Γ groupe dénombrable, (X, μ) espace de proba standard et $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ pmp ergodique $\quad G = [\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)]$

$G = \{ f \in \mathrm{Aut}(X, \mu) \mid \forall x \in X,\ x \mathcal{R}_\alpha f(x) \}$.

$x \mathcal{R}_\alpha y \iff y \in \Gamma \cdot x$

$\forall g \in G$, $S(g) = \{ x \in X \mid gx \neq x \}$.

$l(g) := \mu(S(g))$, $\quad d(g, h) = l(gh^{-1})$

$\Lambda \leq G$ est discret si $\underbrace{\inf \{ l(g) \mid g \in \Lambda \setminus \{id\} \}}_{\delta(\Lambda)} > 0$.

Λ est δ-discret, $\delta > 0$, si $\delta(\Lambda) \geq \delta$.

Λ est essentiellement libre si $\delta(\Lambda) = 1$.

* Déf: On dit que Γ est sans identité mixte (MIF), si $\nexists\ w \in \Gamma * \mathbb{Z}$ tel que $w \neq e$ et $\forall g \in \Gamma$, $w(g) = e$

$g \in \Gamma \quad w = gt^2$

$w(\gamma) = g\gamma^2$

* ex: $\mathbb{F}_n$, $PSL_n(\mathbb{Z})$ (Osin)

* Thm 1 (ACTTD, 24): Si Γ MIF, (X, μ) std, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ pmp ergodique discrète, alors elle est $\frac{1}{2}$ discrète.

* Thm 2: Si Γ MIF (X, μ) standard $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ pmp ergodique compacte, alors Γ discret $\Rightarrow$ Γ essentiell^t libre

$\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$, alors $\overline{\theta(\Gamma)}$ est compacte.

* Prop: Γ dénombrable, $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ pmp ergodique, alors α compacte $\Rightarrow$ $\underset{\exists K \text{ compact}}{\exists}\ L \leq K$ fermé et $\exists \varphi : \Gamma \to K$ inj. d'image dense tel que $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est isomorphe à l'action induite par φ sur K/L, où la mesure sur K/L est l'-image de la mesure de Haar sur K par $\pi : K \to K/L$.

* **Ex :** Actions profinies

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ens. finis, tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists f_n : X_{n+1}\to X_n$

$\Gamma \curvearrowright X_n$ transitive, qui commute avec les f_n,

$X = \text{proj}\lim_{\overline{n}} X_n = \{(a_n)\in \prod_n X_n \mid \forall n\ a_n = f_n(a_{n+1})\}$.

On peut munir X de μ tel que $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est pmp ergodique ($\Gamma \curvearrowright X_n$ transitive).

* **Prop :** $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est compacte.

↳ preuve : $(a_n)_n \in X$, $\Gamma_n = \text{Stab}(a_n)$ d'indice fini dans Γ, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est isomorphe à l'action $\Gamma \curvearrowright \text{proj}\lim(\Gamma/\Gamma_n)$.

$\Gamma_n' = \bigcap_{g\in\Gamma} g\Gamma_n g^{-1} \lhd \Gamma$.

$K = \text{proj}\lim(\Gamma/\Gamma_n')_n$ $\quad r_n : \Gamma/\Gamma'_{n+1} \to \Gamma/\Gamma'_n$

$L = \{(g_n)\in K \mid \forall n,\ g_n \in \pi_n(\Gamma_n)\}$

$\pi : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_n'$

L sous groupe fermé de K, $\cap$ de fermés.

$\Gamma \curvearrowright K/L$ isomorphe à $\Gamma \curvearrowright \text{proj}\lim(\Gamma/\Gamma_n)_n$

$\phi : \Gamma \to K$ $\quad \theta : K \to \text{Aut}(K/L)$
$g \mapsto (\pi_n(g))_n$ $\quad$ cont.

$\theta\circ\phi(\Gamma)$ d'image précompacte. $\square$

Γ MIF $\quad \Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ pmp ergodique compacte

α discrète $\Rightarrow$ ess^t libre

* **Lemme :** Γ groupe, $w_1,\dots,w_k \in \Gamma * \mathbb{Z}\setminus\{e_\Gamma\}$ tq $\forall \gamma\in\Gamma$ $\exists i\in[\![1,k]\!]$, tq $w_i(\gamma) = e_\Gamma$.

Alors Γ n'est pas MIF

↳ preuve : $k=1$: OK

$k\geq 2$: $w_1,\dots,w_{[\frac{k}{2}]} \rightsquigarrow v_1 \neq e_\Gamma \in \Gamma*\mathbb{Z}$

$w_{[\frac{k}{2}]+1},\dots,w_k \rightsquigarrow v_2 \neq e_\Gamma$

$\forall\gamma\in\Gamma$ tel que $\exists i\in[\![1,[\frac{k}{2}]]\!]$ tel que

$w_i(\gamma) = e_\Gamma$

$\to v_1(\gamma) = e_\Gamma$

$w = [v_1, v_2]$

$\to$ si $w \neq e_\Gamma$

$\to$ si $v_1 v_2 = v_2 v_1$

alors $v \in \Gamma * \mathbb{Z}$ tel que $v_1 = v^{m_1}$

$v_2 = v^{m_2}$

Comerford, Edmunds, Rosenberg, 1993 :

donc $m_1 = \pm m_2 = \pm 1$ et $v_1 = v_2^{\pm 1} = v$

$\sim$

$t = \inf \{ \ell(g) \mid g \in \Gamma \setminus \{e\} \} > 0$

on veut mq $t = 1$.

Soit K l'adhérence de Γ dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$,

Fait : si $g_0 \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists g_1 \in \Gamma$ tel que g_1 est d'ordre $\geq m$ et

$\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) < \varepsilon$.

$\hookrightarrow$ preuve : $V \ni e_K$ tq $\forall k \in V$, et V invariant par conjugaison par K, $\mu(k S(g_0) \Delta S(g_0)) < \varepsilon$

Si on n'avait de $k \in V \cap \Gamma$ tel que ordre de k est $\geq m$

Soit $V \ni e_K$ tel que $\forall g \in V$ $[g_0, g] \in V$

Par compacité, $\exists F \subseteq \Gamma$ fini tel que $VF = \Gamma$, $\forall k \in \Gamma$, $\exists s \in F$ tq $k s^{-1} \in V \cap \Gamma$ et

$\exists i \leq m$ tel que $[k s^{-1}, g_0]^i = e_K$

Donc Γ non M i F : $\sim$. si $g_1 = [k, g_0]$
$S(g_1) \subset k S(g_0) \cup S(g_0)$.

On prend $g_0 \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$, et $g_1 \in \Gamma$ d'ordre $\geq m$ tel que $\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) < \varepsilon$ où ε est choisi tq $\ell(g_0) < t + \varepsilon$.

K compact : $\exists U \subseteq K$ invariant par conjugaison par K voisinage ouvert de e_K tel $\forall k \in U$
$\mu(k S(g_0) \Delta S(g_0)) < \varepsilon$.

Par compacité de K, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in K$ $\exists i < m$ tel que $k^i \in U$

Par le fait précédent, $\exists g_1$ d'ordre $\geq m$ tel que $\mu(S(g_1) \setminus S(g_0)) < \varepsilon$.

$\exists i \leq m$ $g_1^i \neq e$ et $g_1^i \in U$

$\forall k \in U$, $\mu(k S(g_1) \Delta S(g_0)) < 2\varepsilon$.

<u>Khintchine</u> : $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ pmp ergodique, alors $\forall \varepsilon>0$ $\forall A,B \subset X$ mesurables, $D = \{\gamma \in \Gamma \mid \mu(\gamma A \cap B) \leq \mu(A)\mu(B)+\varepsilon\}$ est syndétique i.e. $\exists F \subseteq \Gamma$ fini tel que $DF = \Gamma$.

On prend D syndetique tel que $\forall k \in D$,

$$\mu(k S(\underbrace{g_1^i}_{=g}) \cap S(g_1^i)) \leq \mu(S(\underbrace{g_1^i}_{g=g_1^i}))^2 + \varepsilon$$

$$\leq (\underbrace{\mu(S(g_0^i))}_{t+\varepsilon} + \underbrace{\mu(S(g) \Delta S(g_0))}_{\leq 2\varepsilon})^2 + \varepsilon$$

$$\leq (t+3\varepsilon)^2 + \varepsilon$$

$$\leq t^2 + 16\varepsilon.$$

<u>Fait</u>: $\exists k \in D$ tq g, kgk^{-1} ne commutent pas

On pose $h = kgk^{-1}$ $\quad S(h) = kS(g)$

$$\mu(S(g) \cap S(h)) \leq t^2 + 16\varepsilon$$

$\to$ Si $\forall k D$, $[g, kgk^{-1}] = e$,
$\exists F \subseteq \Gamma$ tel que $FD = \Gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma$
$\forall k \in D$, $\exists s \in F$ tq $sk = \gamma$

$$[g, s^{-1}\gamma g (s^{-1}\gamma)^{-1}] = e$$

$A := S(g) \cap S(h)$, on a $\mu(kS(g) \Delta S(g)) \leq 5\varepsilon$.

$\mu(A) - \mu(gA \cap A) \geq 5\varepsilon$

$\mu(A) - \mu(hA \cap A) \geq 5\varepsilon$

$$l([g,h]) \leq 3\mu(A) - \mu(gA \cap A) - \mu(hA \cap A)$$

$$S([g,h]) \subset A \cup gA \cup hA$$

$t \leq \mu(S(g))$

$$l([g,h]) \leq 3\mu(A) - \underbrace{\mu(gA \cap A)}_{\geq \mu(A) - 5\varepsilon} - \underbrace{\mu(hA \cap A)}_{\geq \mu(A)-5\varepsilon}$$

$$\leq \mu(A) + 10\varepsilon$$

$$= \mu(S(g) \cap S(h)) + 10\varepsilon$$

$$\leq t^2 + 16\varepsilon + 10\varepsilon$$

$\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$, $t \leq l(\gamma)$
donc $t \leq l([g,h])$ $\quad t \leq t^2 \rightsquigarrow t = 1$ $\quad \square$

* **Cor** : Si Γ MiF, $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ pmp ergodique compacte non essentiellement libre, alors $\exists (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'él^ts non triviaux de Γ telle que $\ell(\gamma_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Q : Peut on choisir $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendamment de α ?

- Γ de type fini, on dit que $(\gamma_n)_n$ converge au sens de Bohr vers $\gamma \in \Gamma$ si $\forall\, \pi : \Gamma \to K$ morphismes dans K compact, on a $\pi(\gamma_n) \to \pi(\gamma)$.

- On dit que $(\gamma_n)_n$ <u>cv fortement au sens de Bohr</u> si elle cv au sens de Bohr et en plus, $\pi(\gamma_n)_n$ cv uniformément vers $\pi(\gamma)$ pour toute repr° π unitaire de dimension finie.

* **Thm** (Thom, 2012) : Sont équivalents
  (i) $\exists$ suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'él^ts non triviaux de Γ qui cv fortement au sens de Bohr vers id_Γ
  (ii) Γ virtuellement abélien. ~~non~~

Jacobson : à partir d'une constr° de Hull-Osin construit Γ MiF élémentairement moyennable.