Sur les groupes pleins préservant une mesure de probabilité

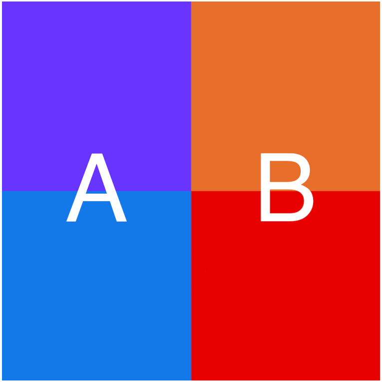
François Le Maître

ENS de Lyon

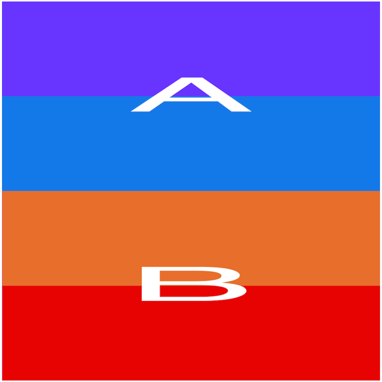
12 Mai 2014

La transformation du boulanger

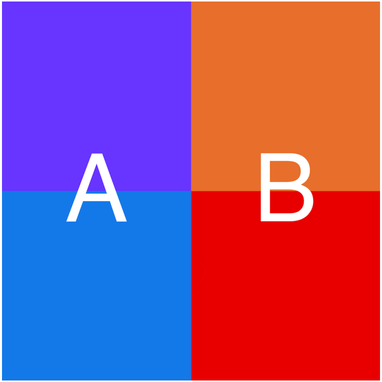
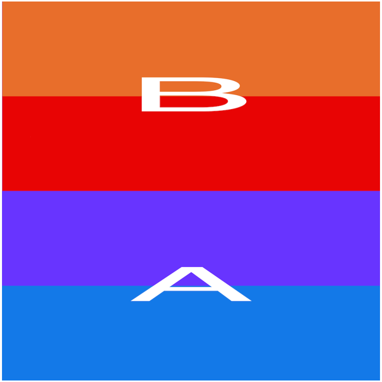
T_b :



$\mapsto$

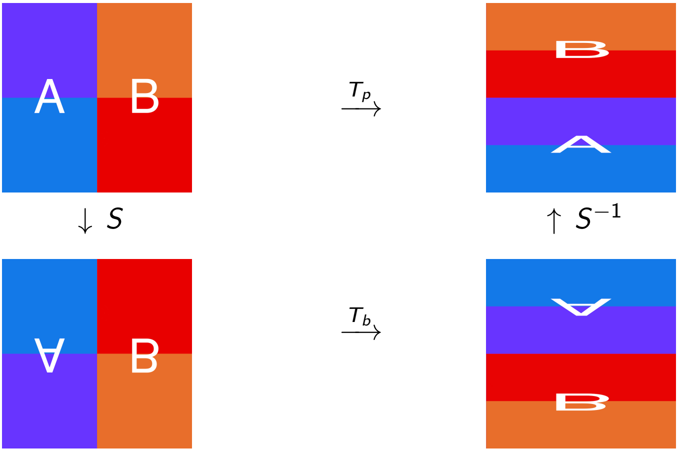


- T_b préserve les aires.
- T_b est inversible.
- T_b est par définition un **système dynamique**.

T_p :  $\mapsto$ 

- T_p préserve encore les aires.
- T_p est encore inversible.
- T_p est donc encore un système dynamique, "le même" que le précédent.

Comparer des systèmes dynamiques : la conjugaison



Les transformations T_b et T_p sont **conjuguées** (par la symétrie axiale S).

Différencier des systèmes dynamiques : une propriété invariante par conjugaison

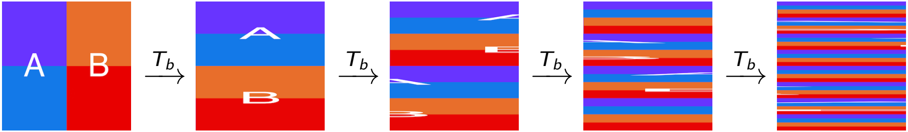
Lemme

Il existe une partie B telle que $\mathcal{A}(B) = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{A}(B \cap T_b^n(B)) = \frac{1}{4}.$$

Démonstration.

Prendre pour B la moitié droite du carré. $\square$



Une telle propriété permet de distinguer la transformation du boulanger et (entre autres) les systèmes dynamiques *compacts*...

Cadre de cet exposé

- (X, μ) est un espace de probabilité standard (i.e. $\cong ([0,1], \lambda)$, ce qui est le cas de tous les espaces de probabilité sans atomes raisonnables).
- Tous les ensembles seront mesurables, tout se passe à mesure nulle près.
- $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est le groupe des bijections boréliennes de X préservant μ, identifiées à mesure nulle près.
- Un **système dynamique classique** est un élément T de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$
- Deux systèmes dynamiques classiques T, $T' \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont dits **conjugués** s'il existe $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tel que pour presque tout $x \in X$

$$ST(x) = T'S(x).$$

Proposition

$\mathrm{Aut}(X, \mu)$ *est un groupe polonais pour la topologie faible, définie par* $T_n \to T$ *ssi pour tout* $A \subseteq X$,

$$\mu(T_n(A) \triangle T(A)) \to 0.$$

Retour sur la conjugaison

- Un système dynamique classique $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est **ergodique** si pour tout $A \subseteq X$ tel que $T^{-1}A = A$, on a $\mu(A) \in \{0, 1\}$.
- Certaines classes de systèmes dynamiques ergodiques classiques sont bien comprises à conjugaison près (transformations compactes, décalages de Bernoulli).

Théorème (Foreman-Rudolph-Weiss 2011)

La relation de conjugaison sur les systèmes dynamiques ergodiques classiques n'est pas borélienne.

Équivalence orbitale

Definition

Deux systèmes dynamiques $T, T' \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ sont dits **orbitalement équivalents** s'ils induisent la même partition de X en orbites, à un $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ près, i.e. pour presque tout $x \in X$,

$$\{ST^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{T'^n S(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Théorème (Dye 59)

Tous les systèmes dynamiques ergodiques classiques sont orbitalement équivalents.

Definition

Un **système dynamique** est un sous-groupe dénombrable Γ de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Il est dit **ergodique** si pour tout $A \subseteq X$, $\Gamma A = A$ implique $\mu(A) \in \{0,1\}$.

Par exemple, si $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, le groupe engendré par T est un système dynamique.

Definition

Soient Γ et $\Gamma' \leq \mathrm{Aut}(X,\mu)$ deux systèmes dynamiques. Ils sont **orbitalement équivalents** s'il existe $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tel que pour presque tout $x \in X$,

$$S(\Gamma \cdot x) = \Gamma' \cdot S(x)$$

Pauvreté de l'équivalence orbitale

Soit Γ un groupe dénombrable, un morphisme de Γ dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ sera appelé une **action pmp** de Γ, notée $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.
Une telle action engendre un système dynamique, on peut donc parler d'équivalence orbitale d'actions pmp.

Théorème (Ornstein-Weiss 80)

Toutes les actions pmp ergodiques de tous les groupes moyennables sont orbitalement équivalentes.

Moyennable : Γ est moyennable s'il existe une suite (F_n) de parties finies de Γ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\frac{|\gamma F_n \triangle F_n|}{|F_n|} \to 0.$$

Dans $\mathbb{Z}^k$, $F_n = \{-n, ..., n\}^k$ convient.

Definition

Une action pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est **libre** si pour tout $\gamma \neq 1$,

$$\mu(\{x \in X : \gamma \cdot x = x\}) = 0.$$

Théorème (Epstein 07)

Soit Γ un groupe non moyennable, alors Γ admet un continuum d'actions pmp ergodiques libres non orbitalement équivalentes.

On a également un phénomène de rigidité, où la partition de l'espace en orbites se souvient entièrement de l'action.

Théorème (Furman 98)

Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp libre orbitalement équivalente à l'action standard $Sl(n, \mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, Haar)$. Alors Γ est isomorphe à $Sl(n, \mathbb{Z})$ et les actions sont conjuguées.

Définition du groupe plein et première propriété

Soit Γ un système dynamique, supposons qu'un autre système dynamique Λ engendre la même partition de l'espace en orbites. Ceci équivaut à dire que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in X, \lambda(x) \in \Gamma \cdot x$$
$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in X, \gamma(x) \in \Lambda \cdot x$$

Definition

Soit $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ un système dynamique. Le **groupe plein engendré** par Γ, noté $[\Gamma]$, est défini par

$$[\Gamma] = \{T \in \mathrm{Aut}(X, \mu) : \forall x \in X, T(x) \in \Gamma \cdot x\}$$

Proposition

Soient $\Gamma, \Lambda \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ deux systèmes dynamiques. Alors $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ induit une équivalence orbitale entre Γ et Λ ssi $S[\Gamma]S^{-1} = [\Lambda]$.

Théorème (Fathi, Eigen 81)

Soit $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ *un système dynamique. Alors s'équivalent*

1. Γ *est ergodique.*
2. $[\Gamma]$ *est un groupe simple.*

Théorème (LM)

Soit $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ *un système dynamique. Alors s'équivalent*

1. Γ *n'a que des orbites infinies.*
2. $[\Gamma]$ *est un groupe parfait (i.e. engendré par les commutateurs).*
3. $[\Gamma]$ *n'a pas de morphisme non trivial à valeur dans* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. $[\Gamma]$ *n'a pas de morphisme non trivial à valeur dans un groupe totalement discontinu.*

Théorème (Dye, 63)

Soient $\Gamma, \Lambda \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ *deux systèmes dynamiques ergodiques. Alors tout isomorphisme* $\varphi : [\Gamma] \to [\Lambda]$ *est une conjugaison.*

Autrement dit, le groupe plein en tant que groupe abstrait est un invariant complet d'équivalence orbitale.

Soit d_u la **distance uniforme** sur $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ définie par, pour tous $T, T' \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$,

$$d_u(T, T') = \mu(\{x \in X : T(x) \neq T'(x)\}).$$

Fait : La distance uniforme est complète.

Proposition

Soit $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ un système dynamique. Alors $[\Gamma]$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ pour la topologie uniforme, et séparable.

Comme une conjugaison est une isométrie pour la distance uniforme, le groupe plein est un invariant d'équivalence orbitale *en tant que groupe topologique*.

Definition

Un groupe topologique G est dit **extrêmement moyennable** si pour tout compact K, toutes les actions continues de G sur K admettent un point fixe.

Théorème (Giordano-Pestov 05, LM)

Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp libre. Alors s'équivalent

1. Γ *est moyennable.*
2. $[\Gamma]$ *est extrêmement moyennable.*

Rang plein et rang topologique (1)

Definition

Soit Γ un groupe dénombrable. Son **rang** est le cardinal minimal de $S \subseteq \Gamma$ tel que $\Gamma = \langle S \rangle$.

Definition

Soit $G = [\Gamma]$ un groupe plein.

- Le **rang plein** de G est le cardinal minimal de $S \subseteq G$ tel que $G = [\langle S \rangle]$.
- Le **rang topologique** de G est le cardinal minimal de $S \subseteq G$ tel que $G = \overline{\langle S \rangle}$.

Proposition

Soit G un groupe plein, et soit $S \subseteq G$ tel que $G = \overline{\langle S \rangle}$. Alors $G = [\langle S \rangle]$.

Autrement dit, rang topologique $\geq$ rang plein.

Rang plein et rang topologique (2)

Théorème (Kittrell-Tsankov 08)

Soit Γ un système dynamique. Alors $[\Gamma]$ est de rang plein fini ssi $[\Gamma]$ est de rang topologique fini.

Théorème (Matui 10)

Tout groupe plein ergodique de rang plein 1 est de rang topologique 2.

Théorème (LM)

Il existe des groupes pleins ergodiques de rang plein 2 et de rang topologique 2.

Nous avons donc besoin d'un invariant plus fin que le rang plein pour comprendre le rang topologique des groupes pleins.

Le coût

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ une involution ($T^2 = \mathrm{id}_X$). On peut la voir comme une "arête épaisse".

Definition

Soit Φ une famille d'involutions, on définit son coût par la formule

$$\text{Coût}(\Phi) = \sum_{T\in\Phi} \frac{1}{2}\mu(\{x \in X : T(x) \neq x\}).$$

Definition (Levitt 95)

Soit $G = [\Gamma]$ un groupe plein. Son coût est l'infimum des coûts des famille Φ d'involutions telles que $G = [\langle\Phi\rangle]$.

Le coût est par définition un nombre réel positif qui constitue un invariant d'équivalence orbitale, inférieur ou égal au rang plein, et donc inférieur ou égal au rang topologique.

Un théorème fondateur

Théorème (Gaboriau 2000)

Soit $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$ *une action pmp libre du groupe libre à n générateurs. Alors*

$$\text{Coût}(\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)) = n$$

De plus, si G *est un groupe plein ergodique dont le coût est égal au rang plein, alors* G *est le groupe plein d'une action pmp libre de* $\mathbb{F}_n$*, où* n *est le rang plein de* G*.*

Ce théorème fournit un autre témoignage de la richesse de l'équivalence orbitale :

Corollaire

Soient $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$ *et* $\mathbb{F}_m \curvearrowright (X, \mu)$ *deux actions pmp libres induisant la même partition de* X *en orbites. Alors* $n = m$*.*

Coût et générateurs topologiques

- Si S et T sont deux involutions, on dit que $S \leq T$ si pour tout $x \in X$ tel que $S(x) \neq x$, on a $S(x) = T(x)$.
- Si Φ est une famille d'involutions, on note

$$\mathcal{I}(\Phi) = \bigcup_{T \in \Phi} \{S \in \mathrm{Aut}(X, \mu) : S \leq T\}.$$

Théorème (Kittrell-Tsankov)

Soit Φ une famille d'involutions, alors

$$[\langle \Phi \rangle] = \overline{\langle \mathcal{I}(\Phi) \rangle}.$$

Corollaire

Soient $[\Gamma]$ et $[\Lambda]$ deux groupes pleins. Alors

$$[\langle \Gamma \cup \Lambda \rangle] = \overline{\langle [\Gamma] \cup [\Lambda] \rangle}$$

Coût et rang topologique (1)

Question (Kechris)

Quel est le lien entre le rang topologique et le coût ?

Si G est un groupe topologique, on note $t(G)$ son rang topologique.

Proposition (Miller)

Soit G un groupe plein. Alors

$$\lfloor Coût(G) \rfloor + 1 \leq t(G)$$

Théorème (Kittrell-Tsankov, Matui)

Soit G un groupe plein ergodique. Alors

$$n + 1 \leq t(G) \leq 2(n + 1).$$

Théorème (LM)

Soit G un groupe plein ergodique. Alors

$$t(G) = \lfloor \mathit{Coût}(G) \rfloor + 1.$$

Une version non ergodique de ce théorème permet de montrer les corollaires suivants.

Corollaire

Soit $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$ une action pmp libre du groupe libre à n générateurs. Alors

$$t([\mathbb{F}_n]) = n + 1.$$

Corollaire

Soit $n \geq 3$, alors toute action pmp libre de $Sl(n, \mathbb{Z})$ engendre un groupe plein dont le rang topologique est égal à 2.

Théorème (LM)

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ de rang un. Alors l'ensemble des $U \in [\langle T\rangle]$ tels que le groupe engendré par T et U soit libre et dense dans $[\langle T\rangle]$ est un G_δ dense.

On note APER l'ensemble des éléments de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ à orbites infinies.

Théorème (LM)

Soit $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X,\mu)$ un système dynamique à orbites infinies. Alors s'équivalent

1. *$[\Gamma]$ est de coût un.*
2. *L'ensemble des couples $(S,T) \in (\mathrm{APER} \cap [\Gamma]) \times [\Gamma]$ engendrant un sous-groupe libre dense dans $[\Gamma]$ est un G_δ dense dans $(\mathrm{APER} \cap [\Gamma]) \times [\Gamma]$.*

Question

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ *à orbites infinies. Existe-t-il* $U \in [\langle T \rangle]$ *tel que* $\overline{\langle T, U \rangle} = [\langle T \rangle]$ *? Si oui, l'ensemble de tels* U *est-il un* G_δ *dense ?*

Il existe d'autres sous groupes de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ que l'on peut qualifier de "pleins" et qui admettent une topologie polonaise :

- Groupes pleins associés à l'action borélienne préservant la mesure d'un groupe polonais (travail en cours avec A. Carderi).
- Groupe plein L^1 associés à un système dynamique classique, qui retient le système dynamique à "flip conjugaison" près.

Leur étude reste à faire !