THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon
délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : Mathématiques

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

École doctorale InfoMaths

présentée et soutenue publiquement le 12 mai 2014

par M. François LE MAÎTRE

Sur les groupes pleins préservant une mesure de probabilité

Directeurs de thèse :	M. Damien GABORIAU
	M. Julien MELLERAY
Après avis de :	M. Thierry GIORDANO
	M. Alexander S. KECHRIS

Devant la commission d'examen formée de :

M. Damien GABORIAU, ENS de Lyon, *Directeur*
M. Thierry GIORDANO, University of Ottawa, *Rapporteur*
M. Cyril HOUDAYER, ENS de Lyon, *Examinateur*
M. Gilbert LEVITT, Université de Caen, *Examinateur*
M. Alain LOUVEAU, Université Paris 6, *Examinateur*
M. Julien MELLERAY, Université Lyon 1, *Directeur*
M. Todor TSANKOV, Université Paris 7, *Examinateur*

à FHADXE.

Abstract

Let (X,μ) be a standard probability space and Γ a countable group acting on X in a measure preserving way. The partition of the space X into Γ-orbits is entirely encoded by the full group of the action, consisting of all the Borel bijections of X which act by permutation on every orbit. To be more precise, Dye's reconstruction theorem states that two measure preserving actions are orbit equivalent (i.e. they induce the same partition up to a measure preserving bijection of (X,μ)) if and only if their full groups are isomorphic.

The reconstruction theorem is the main motivation for this thesis, in which we try to understand how exactly orbit equivalence invariants of measure preserving actions translate into algebraic or topological properties of the associated full group.

The main result deals with the topological rank of full groups, that is the minimal number of elements needed to generate a dense subgroup. It happens to be deeply linked to a fundamental invariant of orbit equivalence : the cost. To be more precise, we have shown that the topological rank is, in the ergodic case, equal to the integer part of the cost of the action plus one. The non-ergodic case was also treated, and we obtained some genericity results for the set of topological generators.

We also obtained a characterization of the measure preserving actions having only infinite orbits : these are the ones whose full group has no nontrivial morphism into $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Résumé

Soit (X, μ) un espace de probabilité standard et Γ un groupe dénombrable agissant sur X de manière à préserver la mesure de probabilité (p.m.p.). La partition de l'espace X en orbites induite par l'action de Γ est entièrement encodée par le groupe plein de l'action, constitué de l'ensemble des bijections boréliennes de l'espace qui agissent par permutation sur chaque orbite. Plus précisément, le théorème de reconstruction de H. Dye stipule que deux actions p.m.p. sont orbitalement équivalentes (i.e. induisent la même partition à une bijection p.m.p. près) si et seulement si leurs groupes pleins sont isomorphes.

Le sujet de cette thèse est grandement motivé par ce théorème de reconstruction, puisqu'il s'agit de voir comment des invariants d'équivalence orbitale, qui portent donc sur la partition de l'espace en orbites, se traduisent en des propriétés algébriques ou topologiques du groupe plein associé.

Le résultat majeur porte sur le rang topologique des groupes pleins, c'est-à-dire le nombre minimum d'éléments nécessaires pour engendrer un sous-groupe dense. Il se trouve être fortement relié a un invariant fondamental d'équivalence orbitale : le coût. Plus précisément, nous avons montré que le rang topologique était, dans le cas ergodique, égal à la partie entière du coût de l'action plus un. Le cas non ergodique a également été étudié, et on a obtenu des résultats complémentaires sur la généricité de l'ensemble des générateurs topologiques.

Enfin, on a caractérisé les actions dont toutes les orbites sont infinies : ce sont exactement celles dont le groupe plein n'admet aucun morphisme non trivial à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remerciements

Damien Gaboriau et Julien Melleray ont été pour moi d'excellents directeurs de thèse, m'orientant sur des sujets passionnants tout en me laissant une grande liberté. Je tiens particulièrement à remercier Julien pour m'avoir initié au monde merveilleux des groupes polonais, et Damien pour les conversations lumineuses qui ont donné naissance au résultat principal de cette thèse. Leur confiance, leur disponibilité ainsi que leur grande expérience mathématique m'ont également été précieuses, et je les en remercie vivement.

C'est suite à un mini-cours donné par Thierry Giordano que je me suis intéressé de plus près au rang topologique des groupes pleins, tandis que les ouvrages *Classical Descriptive Set Theory* et *Global aspects of ergodic theory* d'Alekos Kechris sont pour moi des références incontournables. Ils me font un immense honneur en acceptant de rédiger un rapport sur cette thèse. Je suis très heureux de compter aussi parmi les membres du jury Cyril Houdayer, Gilbert Levitt, Alain Louveau et Todor Tsankov.

L'UMPA a été pour moi une source intarissable d'épanouissement mathématique, et je remercie l'ensemble de ses membres pour son atmosphère stimulante et conviviale.

Cyril et Rémi ont à maintes reprises éclairé ma lanterne au sujet des algèbres de von Neumann, qui me sont grâce à eux devenues sympathiques. De nombreuses conversations avec Sébastien, Alessandro et Sylvain ont également élargi mes horizons.

Une aventure comme la thèse se vit beaucoup mieux à plusieurs, et j'adresse donc un grand merci à mes deux "coburos" Marielle et Sylvain pour ces années riches en émotions, fous rires, Latexeries et autres galères informatiques, tracas administratifs, exercices de TD insolubles, pauses thé ou café ou encore chocolatines. Merci également à Pierre-Adelin, Émeric, Sylvain, Marielle, Sébastien, Alessandro, Rémi, Ramla, Romain, Alexandre, Michele, Daniel et Mickaël avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à discuter, que ce soit à propos des ardus problèmes du calendrier *Dimensions*, du "péti saut" pour grimper plus haut, du chef d'oeuvre cinématographique sud-coréen qu'est *Snowpiercer*, voire même de sujets se rapportant à la présente thèse !

Je sors du laboratoire et remercie mes amis pour toutes ces soirées, randonnées et autres séances de cinéma, ma famille et celle d'Adriane pour leur soutien constant, ainsi que mes professeurs de mathématiques, en particulier François Ulrich, pour m'en avoir transmis le goût avec passion.

Enfin, merci à Damien, Julien, Sébastien et Adriane [1] pour leur relecture attentive.

1. J'espère qu'elle m'excusera de ne pas la remercier pour tout le reste, la marge est trop petite.

Table des matières

Introduction

Soit (X,μ) un espace de probabilité standard et Γ un groupe dénombrable agissant sur X de manière à préserver la mesure de probabilité (p.m.p.). Un des pans les plus importants de la théorie ergodique est la classification des actions p.m.p. à conjugaison près, particulièrement lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$. Par exemple, un théorème de D. Ornstein stipule que les décalages de Bernoulli de $\mathbb{Z}$ sont classifiées par leur entropie [**Orn70**].

Ici, nous nous intéressons à une notion d'équivalence des actions p.m.p. nettement moins fine que la conjugaison : l'équivalence orbitale. L'idée est de regarder uniquement la partition de l'espace en orbites induite par l'action de Γ sur (X,μ). Deux actions sont dites orbitalement équivalentes si, à un automorphisme p.m.p. près, elles induisent la même partition presque partout. Autrement dit deux actions p.m.p. sont orbitalement équivalentes ssi les relations d'équivalence "être dans la même orbite" qu'elles induisent sont les mêmes sur un ensemble de mesure pleine, à un automorphisme p.m.p. près. Puisqu'on a ainsi oublié l'action du groupe, une question qui vient très naturellement est la suivante.

Question. *Existe-t-il des groupes dénombrables non isomorphes admettant des actions p.m.p. libres orbitalement équivalentes ?*

Pour répondre à la cette question, une restriction s'impose : puisque l'ergodicité [2] est invariante par équivalence orbitale, on demandera que les actions soient toutes ergodiques. Un théorème de D. Ornstein et B. Weiss [**OW80**] stipule que sous cette hypothèse, toutes les actions p.m.p. des groupes moyennables [3] sont orbitalement équivalentes deux à deux. Dans une direction opposée, un théorème de D. Gaboriau affirme qu'une action p.m.p. ergodique libre du groupe libre à n générateurs ne peut être orbitalement équivalente à une action p.m.p. ergodique libre du groupe libre à m générateurs dès lors que $m \neq n$ [**Gab00**]. La théorie connaît de nombreux autres développements que nous ne mentionnerons pas, et est intimement liée à la théorie mesurée des groupes. Le lecteur est invité à consulter le panorama donné dans [**Gab10**].

Cette thèse se focalise sur un invariant d'équivalence orbitale : le groupe plein. Ce dernier a été inventé par H. Dye en 1959 dans l'article visionnaire [**Dye59**]. Étant donnée une action p.m.p., on lui associe un groupe plein défini comme l'ensemble des bijections boréliennes $T : X \to X$ tels que pour presque tout $x \in X$, $T(x)$ appartienne à l'orbite de x. Autrement dit, les éléments du groupe plein associé à une action sont les bijections boréliennes qui agissent par permutation sur chaque orbite. De telles bijections préservant automatiquement la mesure, on obtient un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ [4], fermé pour la

2. Une action p.m.p. est dite ergodique si toute ensemble mesurable s'écrivant comme réunion d'orbites est de mesure nulle ou pleine.

3. Un groupe Γ dénombrable discret est dit moyennable s'il admet une suite de sous-ensembles finis $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *asymptotiquement invariante*, i.e. pour tous $\gamma \in \Gamma$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|F_n \triangle \gamma F_n|}{|F_n|} = 0$. Un exemple classique est celui de $\mathbb{Z}$, où la suite d'intervalles définie par $F_n = \{-n, ..., n\}$ témoigne de la moyennabilité.

4. $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est le groupe des bijections boréliennes préservant la mesure de (X,μ), identifiées à mesure nulle près.

topologie induite par la distance uniforme [5]. Notons que le groupe plein se définit uniquement à partir de la relation d'équivalence "être dans la même orbite" induite par l'action p.m.p. considérée.

Soient maintenant $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ deux actions p.m.p. orbitalement équivalentes. La bijection p.m.p. induisant l'équivalence orbitale conjugue les deux groupes pleins associés, qui sont donc isomorphes en tant que groupes topologiques.

Réciproquement, le théorème de reconstruction de Dye [**Dye63**, thm. 2] affirme que tout isomorphisme topologique entre groupes pleins provient d'une équivalence orbitale [6], de sorte que le groupe plein, en tant que groupe topologique vu à isomorphisme près, est en fait un invariant complet d'équivalence orbitale. Ceci motive la question suivante, centrale dans cette thèse.

QUESTION. *Comment les propriétés topologiques du groupe plein d'une action p.m.p. reflètent-elles ses propriétés orbitales ?*

Une première approche est d'étudier la question de la simplicité des groupes pleins. Le théorème suivant est dû à A. Fathi dans le cas du groupe des bijections p.m.p. de (X, μ), et sa preuve s'adapte sans encombre aux groupes pleins généraux (cf. théorème 3.11).

THÉORÈME 1 ([**Fat78**],[**Eig81**]). *Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p., alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'action de Γ est ergodique.

(2) Le groupe plein associé à l'action de Γ est simple.

Dans la veine purement algébrique du théorème précédent, nous caractérisons les actions p.m.p. dont toutes les orbites sont infinies (cf. théorème 3.27 et la remarque qui suit).

THÉORÈME 2. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p.. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) Presque toutes les orbites de l'action de Γ sont infinies.

(2) Tout morphisme du groupe plein associé à l'action de Γ à valeurs dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est trivial.

On peut également étudier la dynamique topologique des groupes pleins, i.e. leurs actions continues sur des espaces topologiques compacts. Un théorème de T. Giordano et V. Pestov caractérise en ce sens les groupes pleins provenant de l'action libre d'un groupe moyennable parmis les groupes pleins ergodiques : ce sont exactement les groupes pleins dont toute action continue sur un compact admet un point fixe (on parle aussi de groupe topologique extrêmement moyennable). Nous étendons ce théorème au cas non ergodique pour obtenir le résultat qui suit (cf. théorème 1.67).

THÉORÈME 3. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p. libre. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes :*

(1) Γ est moyennable.

(2) Le groupe plein associé à l'action de Γ est extrêmement moyennable.

5. La distance uniforme est définie par $d_u(S, T) = \mu(\{x \in X : S(x) \neq T(x)\})$ (cf. également l'annexe B).

6. Mieux, ce théorème affirme que tout isomorphisme abstrait entre groupes pleins provient d'une équivalence orbitale.

Une autre direction explorée dans cette thèse est celle du rang topologique des groupes pleins, c'est-à-dire du nombre minimal d'éléments nécessaires pour engendrer un sous-groupe dense. Ce dernier est intimement lié à un invariant d'équivalence orbitale : le coût. Défini par G. Levitt en 1995 [**Lev95**], le coût est un élément moteur dans le développement de la théorie des groupes mesurée, et ce depuis les résultats obtenus par D. Gaboriau [**Gab00**]. Son lien avec le rang topologique du groupe plein est explicité par J. Kittrell et T. Tsankov [**KT10**] qui prouvent notamment que le rang topologique du groupe plein associé à une action p.m.p. ergodique est fini si et seulement si cette dernière est de coût fini. Dans cette thèse, nous montrons que le lien entre ces deux notions est encore plus profond, et s'exprime via une formule très simple (cf. théorème 4.10, qui couvre également le cas non ergodique).

Théorème 4. *Le rang topologique du groupe plein d'une action p.m.p. ergodique est égal à la partie entière de son coût plus un.*

Enfin, une fois ce théorème établi, on peut essayer de comprendre plus précisément la structure de l'ensemble des générateurs topologiques des groupes pleins et se demander s'ils engendrent des groupes libres denses. On a obtenu le théorème suivant, qui est une reformulation du corollaire 5.19.

Théorème 5. *Soit* $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ *une action p.m.p. à classes infinies, et soit* $[\Gamma]$ *son groupe plein. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ *a coût un.*

(2) L'ensemble des couples d'éléments de $[\Gamma]$ *qui engendrent un sous-groupe libre dense dans* $[\Gamma]$ *est dense dans* $\mathrm{APER} \times [\Gamma]$*, où* APER *désigne l'ensemble des éléments de* $[\Gamma]$ *dont presque toutes les orbites sont infinies.*

Passons au plan de cette thèse. Le chapitre 1 fait la part belle à la définition abstraite des groupes pleins, due à H. Dye, qui permet de traiter dans un cadre unifié les groupes pleins associés à des actions p.m.p. de groupes dénombrables et, entre autres, $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Une fois établies quelques propriétés de base, nous définissons la notion de groupe plein approximativement fini (également due à Dye), motivés par le fait qu'une relation d'équivalence p.m.p. est hyperfinie [7] si et seulement si son groupe plein est approximativement fini. Ceci nous permet de proposer des preuves élégantes de faits bien connus sur l'hyperfinitude. Par exemple, le fait qu'une union croissante de relations d'équivalence p.m.p. hyperfinies soit hyperfinie sera établi comme conséquence d'un résultat aisé concernant leurs groupes pleins (corollaire 1.58). Le chapitre se conclut par une preuve du théorème 3, que l'on établit en montrant que tout groupe plein approximativement fini est extrêmement moyennable.

Notons que ce premier chapitre est l'occasion d'utiliser la notion de mesure conditionnelle par rapport à une sous-algèbre (cf. annexe D). Celle-ci permet d'exprimer naturellement des résultats bien connus pour les relations p.m.p. ergodiques dans le cadre le plus général, et ce sans faire appel au théorème de décomposition ergodique (cf. notamment la proposition 1.14). Nous espérons convaincre le lecteur de l'utilité de cet outil simple et élégant, qui reviendra tout le long de cette thèse, et dont nous attribuons la maternité à D. Maharam [**Mah50**, 2.4].

7. Une relation d'équivalence p.m.p. est hyperfinie si elle s'écrit comme réunion croissante de relations d'équivalence p.m.p. à classes finies. Un théorème fondamental de A. Connes, J. Feldmann et B. Weiss stipule qu'une relation d'équivalence p.m.p. est hyperfinie si et seulement si elle provient d'une action p.m.p. libre d'un groupe moyennable.

L'objectif du chapitre 2 est de présenter deux théorèmes dus à Dye dont les versions non ergodiques sont souvent méconnues. La première section est consacrée à l'odomètre, dont on donne également la définition en tant qu'action profinie et en tant qu'automorphisme de l'arbre binaire enraciné. Nous étudions ensuite le groupe plein de la relation $\mathcal{R}_0$ qu'il engendre, et montrons que ce dernier est topologiquement engendré par les permutations dyadiques (proposition 2.4). Enfin, motivés par le point de vue "profini" sur l'odomètre, nous introduisons la notion d'échelle, inspirés par des travaux de Y. Katznelson et B. Weiss [**KW91**]. Celles-ci vont nous permettre de reconnaître l'odomètre au sein de groupes pleins ergodiques (théorème 2.13).

La seconde section est consacrée à l'analogue non ergodique de l'odomètre. On trouve des générateurs topologiques pour son groupe plein qui seront utiles dans le chapitre 4, puis on voit comment reconnaître l'odomètre non ergodique au sein d'un groupe plein (théorème 2.17).

Ensuite, la section 3 est l'occasion de revenir sur la décomposition ergodique. On l'a déjà signalé, celle-ci est avantageusement remplacée par la notion de mesure conditionnelle lorsqu'il s'agit de comprendre les propriétés de base des groupes pleins non ergodiques. Dans cette section, nous prouvons un théorème de décomposition ergodique pour les groupes pleins à l'aide de méthodes purement "équivalence orbitale". L'idée est de trouver, au sein d'un groupe plein non ergodique, le groupe plein d'un odomètre non ergodique avec les mêmes ensembles invariants. La décomposition ergodique de ce dernier étant facile à comprendre (on a une décomposition en produit), on en déduit une décomposition ergodique du gros groupe plein. Notons que l'on redémontre au passage un théorème dû à Dye (souvent attribué à R. Zimmer dans le cas ergodique [**Zim84**, thm. 9.3.2]) concernant l'existence, au sein d'une relation d'équivalence p.m.p. quelconque, d'une sous-relation hyperfinie ayant la même décomposition ergodique [**Dye59**, thm. 4].

Enfin, la section 4 présente un autre théorème de Dye, qui classifie complètement les relations d'équivalence p.m.p. hyperfinies (théorème 2.28). Notre preuve est une adaptation au cas non ergodique des idées de Y. Katznelson et B. Weiss [**KW91**], et reprend des méthodes développées dans la section 3. Notons qu'elle fait également écho à un théorème de D. Maharam concernant les décompositions en produit d'inclusions d'algèbres de mesure, que nous redémontrons dans l'annexe D.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au groupe plein en tant que groupe abstrait, avec en ligne de mire le théorème 1, dû à A. Fathi. La démonstration usuelle de ce théorème passe par le fait qu'un groupe plein ergodique est parfait, et nous proposons une approche différente, fondée sur les involutions. Tout d'abord, ces dernières engendrent le groupe plein comme nous le montrons dans la première section, en adaptant la preuve de Fathi au cas non ergodique. Ensuite, il s'agit, à partir d'un élément quelconque du groupe plein, de construire une involution au sein du sous-groupe distingué qu'il engendre, ce qui fait l'objet de la seconde section.

Dans la section 3, nous complétons la preuve du théorème de Fathi en reconstruisant toutes les involutions d'un groupe plein ergodique à partir d'une involution non triviale. Avec les mêmes idées, nous redémontrons un théorème de H. Dye décrivant les sous-groupes normaux fermés du groupe plein (théorème 3.13).

La dernière section est consacrée à la propriété de continuité automatique pour les groupes pleins. Rappelons qu'un groupe topologique G a la propriété de continuité automatique si tout morphisme de G dans un groupe topologique séparable H est continu. J. Kittrell et T. Tsankov ont montré que les groupes pleins ergodiques satisfont la propriété de continuité automatique si on les munit de la distance uniforme. Nous introduisons une nouvelle distance sur les groupes pleins, non séparable dès lors que le groupe plein a une infinité de composantes ergodiques, et montrons que tout groupe plein de type II, muni de cette distance, a la propriété de continuité automatique. Nous conjecturons que l'on peut remplacer cette distance par la distance uniforme. On conclut par une preuve du théorème 2 qui permet de caractériser algébriquement les groupes pleins provenant d'une action p.m.p. à orbites infinies.

Le chapitre 4 est modelé autour de la preuve du théorème 4, établissant le lien entre le coût d'une relation d'équivalence p.m.p. apériodique et le rang topologique de son groupe plein. On commence par redémontrer un résultat de J. Kittrell et T. Tsankov très utile pour trouver des générateurs topologiques dans les groupes pleins (théorème 4.3). Afin de traiter également le cas non ergodique du théorème 4, nous introduisons dans la section 2 la notion de coût conditionnel, que l'on peut voir comme une fonction associant à chaque composante ergodique d'une relation d'équivalence p.m.p. son coût. Les section 3 et 4 fournissent deux générateurs topologiques explicites pour le groupe plein de l'odomètre non ergodique. Dans la section 5, nous exploitons ce résultat pour démontrer la formule reliant rang topologique et coût conditionnel.

Ensuite, le chapitre 5 est consacré à la question de la structure de l'ensemble des générateurs topologiques dans un groupe plein. La première section établit quelques résultats de base, parmi lesquels l'impossibilité d'avoir un ensemble dense de générateurs topologiques dans n'importe quelle puissance du groupe plein (lemme 5.7). Cette difficulté est contournée dans la section suivante en imposant que le premier générateur soit apériodique, et en se restreignant aux relations d'équivalence p.m.p. apériodiques de coût un (théorème 5.16). Dans troisième section, nous nous intéressons aux couples d'éléments du groupe plein engendrant un groupe libre, et montrons qu'ils forment eux aussi un sous-ensemble dense, ce qui permet de prouver le théorème 5 (cf. théorème 5.18).

L'annexe porte tout d'abord sur les algèbres de mesure *séparables*, qui forment le cadre de cette thèse. Nous avons saisi l'opportunité de donner des preuves purement constructives des résultats de base les concernant. Signalons parmi ceux-ci le corollaire A.16, qui est une version de l'unicité des espace de probabilité standard, et dont nous établissons la preuve à partir de l'unicité de l'algèbre de mesure sans atomes (théorème A.12). Une telle preuve fournit un chemin assez court vers ce résultat fondamental. Les autres annexes portent sur des résultats utiles mais plus théoriques et souvent standards, qui n'avaient pas vraiment leur place dans le coeur du texte.

Chapitre 1

Groupes pleins mesurés au sens de Dye

La théorie des relations d'équivalence p.m.p. trouve ses origines dans deux articles de H. Dye [**Dye59, Dye63**] . Cependant, le langage retenu, qui est celui des espaces compacts hyperstoonéens mesurés, est aujourd'hui très peu utilisé, et la notion même de relation d'équivalence p.m.p. est absente (il faudra attendre les travaux de G. Mackey [**Mac66**] pour cela). À leur place, Dye introduit la notion de groupe plein, et établit dans ce nouveau cadre de nombreux théorèmes fondamentaux, inspiré par une analogie forte avec les algèbres de von Neumann finies.

Il nous a paru important de remettre au goût du jour la définition originelle de Dye, à la différence près que nous nous placerons dans le cadre moins suranné des algèbres de mesure (cf. annexe A). Par rapport aux relations d'équivalence mesurées, le principal avantage du point de vue "groupe plein" est de permettre des arguments de maximalité dont la théorie des algèbres de von Neumann fait abondamment usage, mais qui sont inutilisables si on se place dans le cadre borélien. On pourra à ce titre comparer notre preuve du théorème 3.1 à son original borélien dans [**KT10**].

Un autre avantage de ce point de vue est que les groupes pleins au sens de Dye sont plus généraux que les groupes pleins de relations d'équivalence mesurées, ce qui permettra par exemple de traiter dans un cadre unifié la simplicité de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ et celle des groupes pleins de relations d'équivalence mesurées ergodiques (cf. théorème 3.11).

Enfin, il sera souvent nécessaire de ne pas oublier que notre algèbre de mesure provient d'un espace de probabilité standard, et nous serons donc amenés à jongler entre les deux points de vue, notamment lorsque nous introduirons l'espérance conditionnelle (cf. annexe D).

1. Définition des groupes pleins et premiers faits

Soit (X,μ) un espace de probabilité standard sans atome, on note $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ l'algèbre de mesure associée [1]. On identifiera les boréliens de X et leurs classes d'équivalence dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, et afin de rendre l'exposé plus lisible on utilisera également des notations ensemblistes au sein de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ autant que possible, c'est-à-dire dès qu'il sera question de familles dénombrables d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. Par exemple, au lieu de dire qu'une partition de X est une famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ telle que pour tout $i\neq j$, $a_i\wedge a_j=0$ et $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} a_i=1$, on dira que c'est une famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles disjoints de X telle que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i=X$.

Définition 1.1. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Un élément T de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est obtenu par **découpage et recollement** d'éléments de G s'il existe une partition $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X et une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $T_{\restriction A_i}=g_{i\restriction A_i}$.

La preuve de la proposition suivante utilise un argument de maximalité qui cependant ne nécessite pas le lemme de Zorn. Nous détaillons donc ici une manière d'éviter ce dernier tout en restant dans le formalisme des algèbres de mesure. De telles méthodes reviendront souvent dans cette thèse.

1. cf. définitions A.2, A.3, et proposition A.4.

Proposition 1.2. *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. *Alors $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ est obtenu par découpage et recollement d'éléments de G ssi pour tout $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul, il existe $B \subseteq A$ non nul tel que T coïncide en restriction à B avec un certain $g \in G$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ la famille des éléments A de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tel que A soit partitionné par une famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $g_i \in G$ tel que $T_{\restriction A_i} = g_{\restriction A_i}$. Il est clair que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable disjointe, et que si $A \in \mathcal{F}$, tout sous-ensemble de A appartient également à $\mathcal{F}$. Ceci implique que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable, et donc $\mathcal{F}$ possède un maximum $A \in \mathcal{F}$ d'après la proposition A.7.

Supposons $A \neq X$, alors $\mu(X \setminus A) > 0$, de sorte que l'on dispose de $B \subseteq X \setminus A$ non nul en restriction duquel T coincide avec un certain $g \in G$. La maximalité de $A \in \mathcal{F}$ est alors contredite par $A \cup B \in \mathcal{F}$. □

Définition 1.3 ([**Dye59**]). Un sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est un **groupe plein** s'il est stable par découpage et recollement de ses éléments.

Proposition 1.4. *Les groupes pleins sont des sous-groupes fermés de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *pour la distance uniforme*[2].

Démonstration. Si G est un groupe plein, et $T \notin G$, on doit avoir par la proposition 1.2 un $A \subseteq X$ non nul tel que pour tout $B \subseteq A$ non nul, $T_{\restriction B}$ ne coïncide avec aucun élément de G. Soit $\epsilon = \mu(A)$, alors pour tout $U \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tel que $d_u(T,U) < \epsilon$, U doit coïncider avec T sur un sous-ensemble non nul A' de A, ce qui implique que $U \notin G$, toujours par la proposition 1.2. □

Proposition 1.5 (Remplissage). *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, *alors il existe un plus petit sous-groupe plein de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *contenant G. Ses éléments s'obtiennent par découpage et recollement d'éléments de G.*

Démonstration. Comme $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est un groupe plein, et comme toute intersection de groupes pleins est un groupe plein, on dispose bien d'un plus petit sous-groupe plein de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ contenant G, que l'on note $[G]$. Soit maintenant H l'ensemble des éléments de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ obtenus par découpage et recollement d'éléments de G. Il est clair que $H \subseteq [G]$, et il s'agit donc de montrer l'inclusion inverse. Pour cela, il faut montrer que H est stable par découpage et recollement de ses éléments, puis que H est un groupe.

Pour montrer que H est stable par découpage et recollement de ses éléments, on va utiliser de manière répétée la proposition 1.2. Soit donc $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ obtenu par découpage et recollement d'éléments de H. Soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul, on dispose de $B \subseteq A$ non nul en restriction duquel T coïncide avec un élément de H, et alors par définition de H on dispose également de $B' \subseteq B$ non nul en restriction duquel T coïncide avec un élément de G, et donc $T \in H$.

Il nous reste à montrer que H est un groupe, ce qui se fait également très simplement au moyen de la proposition 1.2. Soient donc $T, U \in H$, soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul, on a $B \subseteq A$ en restriction duquel U coïncide avec un élément de G. Soit alors $B' \subseteq U(B)$ non nul en restriction duquel T coïncide avec un élément de G. Alors TU coïncide avec un élément de G en restriction à $U^{-1}(B') \subseteq A$, et donc $TU \in H$.

Enfin, si $T \in H$, soit $A \subseteq X$ non nul, on dispose de $B \subseteq T^{-1}(A)$ non nul en restriction duquel T coïncide avec un élément de G, mais alors T^{-1} coïncide avec un élément de G en restriction à $T(B) \subseteq A$ non nul. Ainsi, $T^{-1} \in H$ qui est donc bien un groupe. □

La proposition qui précède appelle naturellement la définition que voici.

2. La distance uniforme est définie par $d_u(S,T) = \mu(\{x \in X : S(x) \neq T(x)\})$, ses propriétés de base sont exposées dans l'annexe B.

Définition 1.6. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Le plus petit sous-groupe plein contenant G est noté $[G]$ et appelé **groupe plein engendré** par G.

Étant donné un sous-groupe $G \leqslant \mathrm{Aut}(X,\mu)$, on dénotera par M_G l'ensemble des $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ telles que $gA = A$ pour tout $g \in G$. Notons que M_G est une sous-algèbre fermée [3] de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$.

Lemme 1.7. *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$*, et soit $\Gamma \leqslant G$ dense pour la topologie faible* [4]*. Alors on a $M_\Gamma = M_G = M_{[G]}$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, alors l'ensemble des $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tels que $TA = A$ est fermé pour la topologie faible. Ainsi, par densité de Γ dans G pour la topologie faible, on a $M_\Gamma \subseteq M_G$. De plus, on a $M_G \subseteq M_\Gamma$ car $\Gamma \subseteq G$, d'où $M_\Gamma = M_G$.

On a également $M_{[G]} \subseteq M_G$ car $G \subseteq [G]$, montrons l'inclusion inverse. Soient donc $A \in M_G$ et $T \in [G]$. Comme T est obtenu par découpage et recollement d'éléments de G, et comme pour tout $g \in G$ et $B \subseteq A$, on a $g(B) \subseteq g(A) = A$, on voit que $T(A) \subseteq A$. Mais T préserve la mesure, donc $T(A) = A$. □

Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, on dit qu'il agit de manière **ergodique** si $M_G = \{\emptyset, X\}$. Le lemme précédent implique donc qu'un groupe G agit ergodiquement ssi le groupe plein $[G]$ qu'il engendre agit ergodiquement.

Soit G un groupe d'automorphismes de (X,μ). Comme M_G est une sous-algèbre fermée de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, elle est isomorphe à l'algèbre de mesure d'un espace de probabilité standard (Y,ν), éventuellement avec atomes, et ce d'après le corollaire A.13. On a alors une identification naturelle entre $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$ et le sous-espace de $\mathrm{L}^2(X,\mu)$ formé des fonctions M_G-mesurables.

Rappelons [5] également que comme $M_G = \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, on a une espérance conditionnelle $\mathbb{E}_G : \mathrm{L}^2(X,\mu) \to \mathrm{L}^2(Y,\nu)$ qui nous permet de définir une **mesure conditionnelle** $\mu_G : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{L}^2(Y,\nu)$ par

$$\mu_G(A) = \mathbb{E}_G(\chi_A),$$

où χ_A est la fonction caractéristique de $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$. Les fonctions dans $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$ étant G-invariantes, on déduit que les éléments de G préservent l'espérance conditionnelle par rapport à M_G, et donc que pour tout $A \subseteq X$,

$$\mu_G(gA) = \mu_G(A),$$

autrement dit G préserve la mesure conditionnelle μ_G. Notons également que si G agit ergodiquement, la mesure conditionnelle μ_G est égale à μ.

Proposition 1.8. *Soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, considérons $B = \{x \in X : \mu_G(A)(x) > 0\}$. Alors B est le plus petit élément de M_G contenant A, et $B = \bigvee_{g\in G} gA$.*

Démonstration. Tout d'abord, $B \in M_G$ car la fonction $\mu_G(A)$ est M_G-mesurable. Montrons que B contient A. On a, comme χ_B est M_G-mesurable, $\mu_G(A\cap B) = \mathbb{E}_G(\chi_A\chi_B) = \mathbb{E}_G(\chi_A)\chi_B = \mu_G(A)\chi_B$. Mais $\chi_B(x) = 1$ dès lors que $\mu_G(A)(x) > 0$, donc $\mu_G(A\cap B) = \mu_G(A)$. Ainsi en intégrant, on obtient $\mu(A \cap B) = \mu(A)$, autrement dit $A \subseteq B$.

Maintenant, si $C \in M_G$ contient A, on peut encore écrire $\mu_G(A) = \mu_G(A \cap C) = \mu_G(A)\chi_C$, et donc $\chi_C(x) > 0$ dès lors que $\mu_G(A)(x) > 0$, ainsi C contient B. Donc B est le plus petit élément de M_G contenant A. Enfin, le plus petit élément de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$

3. L'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est muni de la distance d_μ définie par $\forall A, B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu), d_\mu(A,B) = \mu(A \triangle B)$. Cette distance est complète et séparable (cf. annexe A).

4. La topologie faible sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est la topologie de la convergence simple pour son action sur $(\mathrm{MAlg}(X,\mu), d_\mu)$. Pour plus de détails, on se réfèrera à l'annexe B.

5. Pour plus de détails, cf. le début de l'annexe D.

qui soit G-invariant et qui contienne A est clairement $\bigvee_{g\in G} gA$, ainsi comme M_G est précisément l'algèbre des ensembles G-invariants, on a également $B = \bigvee_{g\in G} gA$. $\square$

DÉFINITION 1.9. Soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, alors le plus petit élément de M_G contenant A est appelé le G-**saturé** de A.

REMARQUE 1.10. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, alors comme $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est un groupe polonais pour la topologie faible (cf. annexe B), on peut trouver un sous-groupe dénombrable Γ faiblement dense dans G. Comme d'après le lemme 1.7, $M_G = M_\Gamma$, la proposition précédente nous dit que le G-saturé de tout ensemble $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est égal à $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma A$ (on utilise ici la notation ensembliste puisqu'on a un supremum sur une famille dénombrable).

DÉFINITION 1.11. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Un **isomorphisme partiel** de G est un isomorphisme entre deux sous-ensembles de X, obtenu par découpage et recollement d'éléments de G.

Autrement dit, $\varphi : A \to B$ est un isomorphisme partiel de G ssi il existe une partition $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A, une partition $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de B, et une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $g_i(A_i) = B_i$ et $T_{\restriction A_i} = g_{i\restriction A_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble A est le **domaine** d'un tel isomorphisme partiel φ, noté dom φ, et B est son **image**, notée img φ. On note $[[G]]$ l'ensemble des isomorphismes partiels de G, appelé parfois **pseudo-groupe plein** de G.

Remarquons que les isomorphismes partiels préservent également la mesure conditionnelle, au sens où si $\varphi : A \to B$ est un isomorphisme partiel de G sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, alors pour tout $C \subseteq A$, on a $\mu_G(C) = \mu_G(\varphi(C))$. La proposition suivante établit une réciproque.

PROPOSITION 1.12 (Folklore). *Soit Γ un groupe dénombrable d'automorphismes de (X,μ) et soient $A, B \subseteq X$ tels que $\mu_\Gamma(A) \leqslant \mu_\Gamma(B)$. Alors il existe $\varphi \in [[\Gamma]]$ tel que* $\mathrm{dom}\ g = A$ *et* $\mathrm{img}\ g \subseteq B$.

DÉMONSTRATION. Énumèrons $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, puis définissons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \left(A \setminus \bigcup_{m<n} A_n\right) \cap \gamma_n^{-1}\left(B \setminus \bigcup_{m<n} \gamma_m(A_m)\right).$$

Soient $A' = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $B' = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n A_n$. Alors $\varphi = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_{n\restriction A_n}$ est un isomorphisme partiel entre A' et B', et il s'agit de montrer que $A' = A$. Supposons $A' \neq A$, comme $\varphi \in [[\Gamma]]$ préserve la mesure conditionnelle, on a $\mu_\Gamma(A \setminus A') \leqslant \mu_\Gamma(B \setminus B')$. De plus, $\mu_\Gamma(A \setminus A')$ est non nul et majoré par $\mu_\Gamma(B \setminus B')$, donc d'après la proposition 1.8 le Γ-saturé de $A \setminus A'$ intersecte $B \setminus B'$. Soit $n \in \mathbb{N}$ le premier entier tel que $\gamma_n^{-1}(B\setminus B') \cap (A \setminus A')$ soit non nul, alors A_n doit intersecter $A \setminus A'$, ce qui contredit la définition de A'. $\square$

REMARQUE 1.13. On pourrait également utiliser directement un argument de maximalité, et ce soit via le lemme de Zorn comme le fait H. Dye [**Dye59**, lem. 3.2], ou bien via un argument similaire à celui utilisé pour prouver la proposition 1.2. Cela permet en outre de s'affranchir de l'hypothèse de dénombrabilité de Γ pour obtenir immédiatement le corollaire suivant, mais nous avons préféré l'approche la plus constructive.

COROLLAIRE 1.14. *Soit G un groupe plein, et soient A et $B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ de même mesure conditionnelle par rapport à M_G. Alors il existe $\varphi \in [[G]]$ de domaine A et d'image B.*

DÉMONSTRATION. On fixe un sous-groupe dénombrable $\Gamma \leqslant G$ dense pour la topologie faible (rappelons que $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est séparable, d'où l'existence d'un tel Γ). Alors Γ

possède la même algèbre d'ensembles invariants que G (lemme 1.7), et donc $\mu_\Gamma = \mu_G$. Ainsi, comme $\mu_G(A) = \mu_G(B)$, la proposition 1.12 nous fournit $\varphi \in [[\Gamma]] \subseteq [[G]]$ de domaine A et dont l'image est incluse dans B, donc égale à B puisque μ_G est préservée par φ. □

Il s'agit maintenant de voir que les isomorphismes partiels d'un groupe plein se prolongent en un élément de ce groupe plein.

Corollaire 1.15. *Soit φ un isomorphisme partiel du groupe plein G. Alors φ est la restriction d'un élément de G.*

Démonstration. Soient $A = \mathrm{dom}\ \varphi$ et $B = \mathrm{img}\ \varphi$. Alors A et B ont les mêmes mesures conditionnelles par rapport à M_G, et donc $X \setminus A$ et $X \setminus B$ également. Par le corollaire 1.14, on dispose de $\psi \in [[G]]$ de domaine $X \setminus A$ et d'image $X \setminus B$. L'automorphisme T obtenu en recollant φ et ψ est alors dans le groupe plein G, et sa restriction à A est bien φ. □

Soit G un groupe plein, alors on peut considérer, pour $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, l'infimum des $d_u(T, U)$ où U parcourt G. Un tel infimum est appelé **distance** de T à G, et on va voir que cette distance est toujours atteinte, c'est-à-dire qu'il existe toujours $\tilde{T} \in G$ tel que

$$d_u(T, \tilde{T}) = \inf_{U \in G} d_u(T, U).$$

Corollaire 1.16. *Soit G un groupe plein, et soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$. Alors l'ensemble des $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ tels que $T_{\restriction A} \in [[G]]$ admet un maximum $B \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$, et la distance de T à G est atteinte.*

Démonstration. La famille des $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ tels que $T_{\restriction A} \in [[G]]$ est stable par union dénombrable car stable par passage au sous-ensemble et réunion dénombrable disjointe. Elle admet donc bien un maximum B. On peut alors, par le corollaire 1.15, prolonger $T_{\restriction B}$ en un élément $\tilde{T}$ du groupe plein G.

Soit maintenant $U \in G$, par définition de B on a $U(x) \neq T(x)$ pour tout $x \in X \setminus B$, et donc $d_u(T, U) \geqslant 1 - \mu(B) = d_u(T, \tilde{T})$. □

Établissons une dernière conséquence de la proposition 1.12 en décrivant l'adhérence du groupe plein dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ pour la topologie faible. La preuve est la même que dans [**Kec10**, prop. 3.1], qui traite le cas ergodique.

Proposition 1.17. *Soit $G \leqslant \mathrm{Aut}(X, \mu)$ un groupe plein. Alors l'adhérence faible de G est le groupe des automorphismes préservant la mesure conditionnelle par rapport à M_G, c'est-à-dire[6] le groupe des $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tels que pour tout $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$, $\mu_G(TA) = \mu_G(A)$. En particulier, si G est ergodique alors il est faiblement dense dans $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ préservant μ_G. Soit $(A_1, ..., A_n)$ une partition finie de X et $\epsilon > 0$, on cherche $g \in G$ tel que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mu(T(A_i) \triangle g(A_i)) \leqslant \epsilon$. On va voir qu'on peut même trouver $g \in G$ vérifiant cette égalité pour $\epsilon = 0$.

En effet comme T préserve μ_G on a $\mu_G(T(A_i)) = \mu_G(A_i)$, le corollaire 1.14 nous fournit $\varphi_i \in [[G]]$ de domaine A_i et d'image $T(A_i)$. Alors l'élément $g \in G$ obtenu en recollant les φ_i satisfait bien $g(A_i) = T(A_i)$.

Enfin, le fait que le groupe des automorphismes préservant μ_G soit faiblement fermé provient de la continuité de l'action de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ sur $\mathrm{L}^2(X, \mu)$. □

6. Pour une description plus concrète du groupe des automorphismes préservant la mesure conditionnelle, cf. théorème D.6.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 4.3 dû à J. Kittrell et T. Tsankov. Cependant, elle est facile à établir via le corollaire précédent, et va nous servir dès ce chapitre, lorsque nous parlerons de relations approximativement finies.

PROPOSITION 1.18. *Soit* $(G_i)_{i\in I}$ *une famille dirigée de groupes pleins (i.e. pour tous* $i_1, i_2 \in I$ *on dispose de* $i_3 \in I$ *tel que* $G_{i_1} \cup G_{i_2} \subseteq G_{i_3}$*). Alors* $\bigcup_{i\in I} G_i$ *est un sous-groupe dense de* $[\bigcup_{i\in I} G_i]$ *pour la distance uniforme.*

DÉMONSTRATION. Soient $T \in [\bigcup_{i\in I} G_i]$ et $\epsilon > 0$. Par définition, on dispose d'une partition $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X et d'éléments $g_j \in \bigcup_{i\in I} G_i$ tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $T_{\restriction A_j} = g_{j\restriction A_j}$. Soit alors j_0 tel que $\mu(\bigcup_{j<j_0} A_j) > 1-\epsilon$, comme $(G_i)_{i\in I}$ est dirigée on dispose de $i_0 \in I$ tel que pour tout $j < j_0$, $g_j \in G_{i_0}$.

Par définition du pseudo-groupe plein, on obtient que $T_{\restriction \bigcup_{j<j_0} A_j} \in [[G_{i_0}]]$. Mais comme G_{i_0} est un groupe plein on peut prolonger $g_{\restriction \bigcup_{j<j_0} A_j}$ en un élément de G_{i_0} par le corollaire 1.15. Il est alors clair que ce prolongement est ϵ-proche de T. □

2. Relations d'équivalence p.m.p.

Nous allons dans cette section nous restreindre aux groupes pleins associés à des actions de groupes dénombrables, qui sont les plus étudiés car ils reflètent fidèlement de nombreuses propriétés de ces groupes, comme par exemple la moyennabilité. C'est Mackey qui en 1966 a dégagé la notion de relation d'équivalence p.m.p. [**Mac66**, sec. 10], ramenant l'étude de tels groupes pleins à celle d'un borélien de $X \times X$.

DÉFINITION 1.19. Soit Γ un groupe dénombrable agissant de manière borélienne sur un borélien standard X. La **relation d'équivalence orbitale** $\mathcal{R}_\Gamma$ associée à cette action est la réunion des graphes $\{(x, \gamma x) : x \in X\}$ des éléments γ de Γ, on dit aussi que c'est la relation d'équivalence **engendrée** par l'action de Γ.

La relation d'équivalence orbitale $\mathcal{R}_\Gamma$ associée à une action borélienne de Γ sur (X, μ) est donc un borélien de $X \times X$. C'est la relation d'équivalence "être dans la même Γ-orbite".

DÉFINITION 1.20. Soit $\mathcal{R}$ un borélien de $X \times X$, où (X, μ) est un espace de probabilité standard. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence p.m.p.** s'il existe un groupe dénombrable Γ agissant de manière borélienne sur (X, μ) en préservant [7] μ tel que $\mathcal{R}$ soit engendrée par l'action de Γ.

Le **pré-groupe plein** d'une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ est le groupe des automorphismes boréliens $\varphi : X \to X$ dont le graphe est inclus dans $\mathcal{R}$.

PROPOSITION 1.21. *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence p.m.p. engendrée par un groupe dénombrable* Γ. *Alors*

(1) $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables,*

(2) Tout élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}$ *préserve la mesure, et*

(3) Le pré-groupe plein se surjecte sur le groupe plein engendré par Γ *via le morphisme de groupes* [8] *qui à une bijection p.m.p. de* (X, μ) *associe l'automorphisme de l'algèbre de mesure* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ *qu'elle induit.*

7. On dit que Γ préserve μ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout borélien A de X, $\mu(\gamma A) = \mu(A)$.

8. D'après l'annexe B, ce morphisme, noté $T \mapsto \bar{T}$, est une surjection du groupe $\mathrm{Bij}_\mu(\mathrm{X})$ des bijections p.m.p. sur le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ des automorphismes de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$, et que son noyau est formé des bijections dont le support est de mesure nulle.

DÉMONSTRATION. Le premier point est clair, concernant le second on énumère $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit maintenant T un élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in X$, soit $n(x) \in \mathbb{N}$ le premier des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $T(x) = \gamma_n x$. Posons $B_n = \{x \in X : n(x) = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de X, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T_{\restriction B_n} = \gamma_n.$$

Ainsi, on obtient à la fois que T préserve la mesure, et que l'automorphisme de l'algèbre de mesure $\bar{T} \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ qu'il induit appartient au groupe plein engendré par Γ.

Pour montrer la surjectivité, soit $\bar{T} \in [\Gamma]$, par définition on dispose d'une partition conulle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{\restriction A_n} = \gamma_{n\restriction A_n}$. Soit alors $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n(A)$ est de mesure pleine et T-invariant. On pose alors

$$T'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ T(x) & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Il est clair que $\bar{T} = \bar{T}'$, mais T' appartient au pré-groupe plein de $\mathcal{R}$, donc $\bar{T}$ est bien l'image d'un élément du pré-groupe plein. □

COROLLAIRE 1.22. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. sur (X,μ). Alors toute action borélienne d'un groupe dénombrable Γ sur X ayant $\mathcal{R}$ pour relation d'équivalence orbitale est automatiquement une action p.m.p..*

DÉMONSTRATION. Si Γ engendre $\mathcal{R}$, alors Γ est inclus dans le pré-groupe plein de $\mathcal{R}$, et préserve donc la mesure d'après (2) de la proposition précédente. □

REMARQUE 1.23. Un théorème de J. Feldman et C. Moore [**FM77**, thm. 1] assure que toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un espace de probabilité standard (X,μ) satisfaisant les conditions (1) et (2) de la proposition 1.21 est une relation d'équivalence p.m.p., c'est-à-dire qu'on peut trouver un groupe dénombrable Γ agissant de manière p.m.p. sur (X,μ) de sorte que $\mathcal{R}$ soit la relation d'équivalence orbitale associée à cette action. On aurait ainsi pu donner une définition abstraite des relations d'équivalence p.m.p., mais sans ce théorème de Feldman-Moore, dont la preuve fait appel au théorème de Lusin-Novikov (cf. [**Kec95**, thm. 18.10]), une telle définition est vide. Ayant privilégié une approche faisant appel au minimum de connaissances, nous nous en tiendrons à la définition 1.20.

DÉFINITION 1.24. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Le **groupe plein** de $\mathcal{R}$, noté $[\mathcal{R}]$, est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ obtenu comme image du pré-groupe plein par le morphisme qui à une bijection p.m.p. de (X,μ) associe l'automorphisme qu'elle induit sur $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$.

D'après le (3) de la proposition 1.21, un groupe plein au sens de la définition précédente est bien un groupe plein au sens de de la définition 1.3 des groupes pleins. De plus, si Γ est un groupe dénombrable engendrant une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}_\Gamma$, le groupe plein de $\mathcal{R}_\Gamma$ est égal au groupe plein *engendré* par Γ au sens de la définition 1.6, autrement dit $[\mathcal{R}_\Gamma] = [\Gamma]$.

PROPOSITION 1.25. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors son groupe plein est séparable pour la distance uniforme.*

DÉMONSTRATION. Soit Γ un groupe dénombrable tel que $\mathcal{R}$ soit engendrée par Γ. Soit A un borélien de $\mathcal{R}$, alors pour $x \in X$ on note $A_x = \{y \in X : (x,y) \in A\}$. On définit une mesure ν sur les boréliens A de $\mathcal{R}$ par [9] $\nu(A) = \int_X |A_x|\, d\mu(x)$. Soit $\mathrm{Mf}(\mathcal{R},\nu)$

9. la mesurabilité de $x \mapsto |A_x|$ peut se voir en utilisant le groupe Γ. Plus précisément, on voit que $|A_x| \geqslant n$ ssi il existe $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$ tels que les $\gamma_i(x)$ soient tous distincts, ce qui est clairement une condition borélienne.

l'espace des boréliens de $\mathcal{R}$ de mesure finie identifiés à mesure nulle près. Il est muni de la distance naturelle $d_\nu(A,B) = \nu(A \triangle B)$. On énumère $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\mathcal{R}$ s'identifie à l'ensemble des $(x,\gamma_n) \in X \times \Gamma$ tels que pour tout $m < n$, $\gamma_m(x) \neq x$. La mesure ν est alors simplement la mesure induite sur $\mathcal{R}$ par la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ sur $X \times \Gamma$, où λ est la mesure de comptage sur Γ. D'après la proposition A.4, les espaces métriques $(\mathrm{MAlg}(X \times \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}, \mu \otimes \lambda), \mu \otimes \lambda), d_{\mu\otimes\lambda})$ sont séparables. Comme leur réunion est dense dans l'espace métrique $(\mathrm{Mf}(X \times \Gamma, \mu \otimes m), d_{\mu\otimes\lambda})$, ce dernier est séparable, et donc $(\mathrm{Mf}(\mathcal{R},\nu), d_\nu)$ l'est également.

Soient maintenant $T, U \in [\mathcal{R}]$, alors leurs graphes $\tilde{T}$ et $\tilde{U}$ sont deux éléments de $(\mathrm{Mf}(\mathcal{R},\nu), d_\nu)$, chacun de mesure un, et on a

$$\begin{aligned} d_\nu(\tilde{T},\tilde{U}) &= \int_X \left|(\tilde{T} \triangle \tilde{U})_x\right| d\mu(x) \\ &= \int_X |\{T(x)\} \triangle \{U(x)\}|\, d\mu(x) \\ &= 2\mu(\{x \in X : T(x) \neq U(x)\}) \\ d_\nu(\tilde{T},\tilde{U}) &= 2d_u(T,U) \end{aligned}$$

Donc l'application $T \mapsto \tilde{T}$ est bilipschitzienne de $([\mathcal{R}], d_u)$ dans $(\mathrm{Mf}(\mathcal{R},\nu), d_\nu)$, et ainsi $[\mathcal{R}]$ est séparable puisque $(\mathrm{Mf}(\mathcal{R},\nu), d_\nu)$ l'est. □

Corollaire 1.26. *Soit $G \subseteq \mathrm{Aut}(X,\mu)$ un groupe plein. Alors G est séparable pour la distance uniforme ssi G est le groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p..*

Démonstration. On vient de voir que si G est le groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p., alors G est séparable pour la distance uniforme. Réciproquement, si G est séparable pour la distance uniforme, on peut alors choisir un sous-groupe dénombrable Γ dense dans G pour la topologie uniforme. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence p.m.p. engendrée par Γ, alors $[\mathcal{R}] = [\Gamma]$ par la proposition 1.21, et $[\Gamma] \subseteq G$ par définition du groupe plein engendré. Mais $[\Gamma]$ est fermé car c'est un groupe plein, et comme Γ est dense dans G, on doit donc avoir $G = [\Gamma] = [\mathcal{R}]$. □

Définition 1.27. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence p.m.p. respectivement sur (X,μ) et (Y,ν). Elles sont **isomorphes** si on peut trouver deux boréliens de mesure pleine $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ ainsi qu'une bijection p.m.p. $T : A \to B$ telle que pour tout $x \in A$,

$$T([x]_{\mathcal{R}}) = [T(x)]_{\mathcal{R}}.$$

Un tel T sera appelé un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Remarque 1.28. Soit φ une bijection borélienne de X dans Y préservant seulement la classe de μ (i.e. $\varphi_*\mu \sim \nu$) et envoyant une relation d'équivalence p.m.p. ergodique $\mathcal{R}$ sur une autre relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}'$. Alors, la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi_*\mu$ est invariante par les éléments du groupe plein de $\mathcal{R}$, donc constante égale à 1 par ergodicité, i.e. μ est préservée par φ. Autrement dit, dans la définition précédente, on peut se contenter de demander que φ préserve la classe de μ dès lors que $\mathcal{R}$ est ergodique.

Définition 1.29 (Dye). Deux groupes pleins G et G' respectivement sur (X,μ) et (Y,ν) sont dits **équivalents** s'il existe un isomorphisme d'algèbres de mesures $T : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ conjuguant G et G', c'est-à-dire que $TGT^{-1} = G'$. Un tel isomorphisme T est alors appelé une équivalence entre G et G'.

Proposition 1.30. *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence p.m.p. sur (X,μ) et (Y,ν) respectivement, et soit T un isomorphisme entre les algèbres de mesure* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$

et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$*. Alors* T *est une équivalence entre* $[\mathcal{R}]$ *et* $[\mathcal{R}']$ *ssi* T *est un isomorphisme*[10] *entre* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$*.*

Démonstration. Soient Γ, Γ' deux groupes dénombrables engendrant $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement, et soit $T : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ un isomorphisme d'algèbres de mesure. Alors on a

$$T[\mathcal{R}]T^{-1} = T[\Gamma]T^{-1} = [T^{-1}\Gamma T].$$

De plus, $[\mathcal{R}'] = [\Gamma']$ donc T est une équivalence entre $[\mathcal{R}]$ et $[\mathcal{R}']$ ssi $[T\Gamma T^{-1}] = [\Gamma']$, ce qui par définition du groupe plein engendré est équivalent à demander que $\Gamma' \subseteq [T\Gamma T^{-1}]$ et que $T\Gamma T^{-1} \subseteq [\Gamma']$.

Mais $\Gamma' \subseteq [T\Gamma T^{-1}]$ ssi pour presque tout $x \in X$, $\Gamma' x \subseteq T\Gamma T^{-1} x$, ce qui est équivalent à demander que pour presque tout $x \in X$,

$$T^{-1}(\Gamma' x) \subseteq \Gamma T^{-1}(x).$$

Et comme T une bijection qui préserve la mesure, on peut dans la formule qui précède remplacer x par $T(x)$ et obtenir que $\Gamma' \subseteq [T\Gamma T^{-1}]$ ssi pour tout $x \in X$,

$$T^{-1}(\Gamma' T(x)) \subseteq \Gamma x.$$

Ensuite, $T\Gamma T^{-1} \subseteq [\Gamma']$ ssi pour presque tout $x \in X$, $T\Gamma T^{-1}(x) \subseteq \Gamma' x$, ce qui est équivalent à demander que pour presque tout $x \in X$,

$$T(\Gamma x) \subseteq \Gamma' T(x)).$$

Ainsi, T est une équivalence entre $[\mathcal{R}]$ et $[\mathcal{R}']$ ssi pour presque tout $x \in X$, $T(\Gamma x) \subseteq \Gamma' T(x))$ et $T^{-1}(\Gamma' T(x)) \subseteq \Gamma x$, autrement dit ssi $T(\Gamma x) = \Gamma' T(x)$ pour presque tout $x \in X$, i.e. ssi T est un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. □

Signalons pour finir le théorème de reconstruction de Dye, qui stipule que tout isomorphisme abstrait entre deux groupes pleins ergodiques est en fait une équivalence (cf. [**Dye63**, thm. 2]).

Remarque 1.31. Le théorème de reconstruction de Dye tel qu'énoncé dans [**Dye63**] est en fait valable pour des groupes pleins de type II généraux, mais l'isomorphisme $T : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ implémentant l'équivalence est seulement un isomorphisme d'algèbres booléennes, ce qui revient à dire que la bijection entre deux ensembles de mesures pleines $\bar{T}$ correspondante préserve seulement la classe de la mesure. D'après la remarque 1.28, un tel théorème implique bien que dans le cas ergodique, un isomorphisme abstrait de groupes pleins provient d'une véritable équivalence.

3. Finitude et apériodicité des relations d'équivalence p.m.p.

Définition 1.32. Une relation d'équivalence p.m.p. est **finie** si presque toutes ses classes sont finies. Elle est **apériodique** si presque toutes ses classes sont infinies.

Nous allons maintenant donner une caractérisation des relations apériodiques ainsi que des relations finies qui permettra de faire le lien avec le type des groupes pleins généraux, défini dans la section suivante. Pour cela, il nous faut encore une définition.

Définition 1.33. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. sur (X,μ). Un **domaine fondamental** de $\mathcal{R}$ est un borélien A de X tel que pour presque tout $x \in X$, il existe un unique $a \in A \cap [x]_{\mathcal{R}}$. Autrement dit, A intersecte presque toute $\mathcal{R}$-classe en un unique point.

10. Rappelons que d'après le corollaire A.15, tout isomorphisme entre $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ se relève de manière unique à mesure nulle près en une application $X \to Y$ borélienne qui induit une bijection entre deux boréliens de mesure pleine, ce qui nous autorise donc à voir T comme une application de X dans Y.

LEMME 1.34. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors $\mathcal{R}$ est finie ssi elle admet un domaine fondamental.*

DÉMONSTRATION. Puisque (X, μ) est un espace de probabilité standard sans atomes, et comme on néglige les ensembles de mesure nulle, on peut supposer que $X = [0, 1]$ et que μ est la mesure de Lebesgue (cf. corollaire A.16). Si $\mathcal{R}$ est finie, l'ensemble des minimums des $\mathcal{R}$-classes finies est un domaine fondamental pour $\mathcal{R}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ possède un domaine fondamental A. Soit X_∞ l'ensemble des $x \in X$ dont la $\mathcal{R}$-classe est infinie, alors $A \cap X_\infty$ est un domaine fondamental de la restriction de $\mathcal{R}$ à X_∞. On va construire par récurrence une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[[\mathcal{R}]]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, dom $\varphi_n = A \cap X_\infty$, et

$$X_\infty = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{img} \varphi_n.$$

Comme chaque φ_n préserve la mesure qui est finie, ceci impliquera que $\mu(A \cap X_\infty) = 0$, et donc que $\mu(X_\infty) = 0$, ce qui est demandé.

La construction de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se fait ainsi : on commence par énumérer un groupe dénombrable $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\mathcal{R}$ soit engendrée par Γ, avec $\gamma_0 = \mathrm{id_X}$. On pose $T_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{X}_\infty}$. Puis, étant donnés $\varphi_0, ..., \varphi_n \in [[\mathcal{R}]]$ de domaine $A \cap X_\infty$ et d'images disjointes recouvrant $\bigcup_{m=0}^{n} \gamma_m(A \cap X_\infty)$, on pose, pour $x \in A \cap X_\infty$,

$$\varphi_{n+1}(x) = \gamma_m x,$$

où $m \in \mathbb{N}$ est le premier entier tel que $\gamma_m x \notin \{\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x)\}$ (un tel entier existe bien par apériodicité de $\mathcal{R}_{\restriction X_\infty}$). Comme A est un domaine fondamental, φ_{n+1} est injective, et c'est donc un isomorphisme partiel de $\mathcal{R}$. De plus, la réunion pour $0 \leqslant m \leqslant n+1$ des img φ_m contient $\bigcup_{m=0}^{n+1} \gamma_m(A \cap X_\infty)$ par construction et hypothèse de récurrence. On construit ainsi une suite (φ_n) d'éléments de $[[\mathcal{R}]]$ de domaine $A \cap X_\infty$, dont les images sont disjointes et recouvrent $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \gamma_m(A \cap X_\infty)$. Comme $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathcal{R}$, on a bien $X_\infty = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{img} \varphi_n$. □

COROLLAIRE 1.35. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors $\mathcal{R}$ est apériodique ssi sa restriction à tout borélien non nul n'admet pas de domaine fondamental.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. quelconque, soit X_∞ l'ensemble des $x \in X$ dont la $\mathcal{R}$-classe est infinie. Si $X_\infty \neq X$, le lemme précédent implique que la restriction de $\mathcal{R}$ à $X \setminus X_\infty$ possède un domaine fondamental.

Réciproquement, si $Y \subseteq X$ est un borélien non nul en restriction duquel $\mathcal{R}$ possède un domaine fondamental $A \subseteq Y$, alors par définition A est toujours un domaine fondamental pour la restriction de $\mathcal{R}$ au $\mathcal{R}$-saturé de Y, noté Y'. Mais alors, toujours par le lemme précédent, la restriction de $\mathcal{R}$ à Y' est finie, et donc $\mathcal{R}$ n'est pas apériodique. □

La proposition suivante donne des informations plus précises sur le cas apériodique.

PROPOSITION 1.36 (Lemme des marqueurs). *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique. Alors il existe une suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens de X d'intersection vide, telle que, pour presque tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in A_n$ tel que $x \,\mathcal{R}\, y$.*

DÉMONSTRATION. On peut encore supposer que $X = [0, 1]$. On définit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ par $f(x) = \inf[x]_\mathcal{R}$.

On pose alors $A_n = \{x \in [0, 1] : f(x) < x < f(x) + \frac{1}{2^n}\}$. Si la $\mathcal{R}$-classe de $x \in [0, 1]$ est infinie alors son infimum est la limite d'une suite décroissante d'éléments de $[x]_\mathcal{R}$, d'où le fait que les A_n intersectent toutes les classes infinies. Enfin, il est clair que l'intersection des A_n est vide. □

Remarque 1.37. Dans les preuves précédentes, on a éludé les questions de mesurabilité. Celles-ci sont réglées par l'utilisation d'un groupe dénombrable Γ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\Gamma$, ce qui permet de décrire la classe de x comme l'ensemble des $\gamma \cdot x$. Par exemple la fonction $f(x) = \inf[x]_\mathcal{R} = \inf\{\gamma \cdot x : \gamma \in \Gamma\}$ est borélienne car c'est l'infimum d'une famille dénombrable de fonctions boréliennes.

4. Groupes pleins de type I et II

Nous allons commencer par définir le type d'un groupe plein. Comme nous nous intéressons également aux groupes pleins ne provenant pas de relations d'équivalence mesurées, nous aurons besoin de la définition originelle de H. Dye.

Définition 1.38 ([**Dye59**, sec. 2]). Soit N une sous-algèbre fermée de $M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Un élément non nul $A \in M$ est un **atome relativement à** N si pour tout $B \subseteq A$, il existe $C \in N$ tel que $B = A \cap C$.

Exemple 1.39. Si $N = \{\emptyset, X\}$, alors un atome relativement à N est un atome usuel.

Exemple 1.40. Soit (Y, ν) un espace de probabilité standard, et soit $Z = \{1, ..., n\}$ muni de la mesure de comptage normalisée λ. On pose $(X, \mu) = (Y \times Z, \nu \otimes \lambda)$. Soit $N = \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ qui est naturellement incluse dans $M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ via π_Y^{-1}. Alors les atomes de M relativement à N sont les ensembles A tels que la fibre au-dessus de presque tout $y \in Y$ est de cardinal au plus un.

Définition 1.41. Soit $N \subseteq M$ une inclusion d'algèbres de mesure. Elle est de **type I** si tout élément de M contient un atome au-dessus de N, et de **type II** si M n'a pas d'atomes au-dessus de N.

Le **type** d'un groupe plein G agissant sur un espace de probabilité standard (X, μ) est le type de l'inclusion de l'algèbre M_G des parties G-invariantes dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$.

Proposition 1.42. *Soit G un groupe plein. Alors il existe un unique $D \in M_G$ tel que le groupe $G_{\restriction D}$ formé des restrictions de G à D soit de type II, et que le groupe $G_{\restriction X \setminus D}$ formé des restrictions d'éléments de G à $X \setminus D$ soit de type I.*

Démonstration. Commençons par montrer que l'ensemble des atomes au dessus de M_G est G-invariant. Soit B un atome de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ au dessus de M_G, et soit $g \in G$. Alors, si $A \subseteq gB$, on a $g^{-1}A \subseteq B$, et on dispose par définition de $C \in M_G$ tel que $g^{-1}A = B \cap C$. Alors $A = gB \cap gC = gB \cap C$. Ceci montre que gB est un atome au dessus de M_G. L'ensemble des atomes au dessus de M_G est donc bien G-invariant.

La famille des éléments de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ qui ne contiennent aucun atome au dessus de M_G est donc G-invariante, et comme elle est stable par union dénombrable, elle possède un maximum D (proposition A.7). Par définition, $G_{\restriction D}$ est de type II, tandis que $G_{\restriction X \setminus D}$ est de type I par maximalité de D.

Enfin, si D' est tel que $G_{\restriction D'}$ soit de type II, alors on doit avoir $D' \subseteq D$, mais par définition si $D' \neq D$, la restriction de G à $D \setminus D'$ est de type II. Ceci implique que la restriction de G à $X \setminus D'$ n'est pas de type I, d'où l'unicité de D. $\square$

Il s'agit maintenant de comprendre le type des groupes pleins relations d'équivalence p.m.p..

Lemme 1.43. *Soit G un groupe plein. Alors $A \subseteq X$ est un atome au dessus de M_G ssi pour tout $B \subseteq A$, si on note C le G-saturé*[11] *de B, alors*

$$B = A \cap C.$$

11. Le G-saturé de B est le plus petit élément de M_G contenant B, son existence est établie par la proposition 1.8.

Démonstration. Supposons que A soit un atome au dessus de M_G, et soit $B \subseteq A$. Par définition on dispose de $\tilde{C} \in M_G$ tel que $B = A \cap \tilde{C}$. Rappelons que le G-saturé de B est le plus petit élément $C \in M_G$ contenant B, et donc $C \subseteq \tilde{C}$. Comme $B \subseteq C$ et $B \subseteq A$, on a

$$A \cap \tilde{C} = B \subseteq A \cap C \subseteq A \cap \tilde{C},$$

et donc $A \cap \tilde{C} = A \cap C = B$, ce qui établit l'implication directe. L'implication réciproque provient simplement du fait que $C \in M_G$. □

Proposition 1.44. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p., et soit $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Alors A est un atome au-dessus de $M_{[\mathcal{R}]}$ ssi A est un domaine fondamental pour la restriction de $\mathcal{R}$ au $[\mathcal{R}]$-saturé de A.*

Démonstration. Soit $A \subseteq X$ un atome au dessus de $M_{[\mathcal{R}]}$, et soit B son $[\mathcal{R}]$-saturé. Supposons que A ne soit pas un domaine fondamental de la restriction de $\mathcal{R}$ à B, alors l'ensemble

$$C = \{x \in A : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \{x\}\}$$

est de mesure non nulle.

Soit $\mathcal{S}$ la restriction de $\mathcal{R}$ à C. Soit C_f l'ensemble des $x \in C$ dont la $\mathcal{S}$-classe est finie, et soit $C_\infty = C \setminus C_f$. Soit D_f un domaine fondamental de $\mathcal{S}_{\restriction C_f}$ (cf. lemme 1.34), et soit par le lemme des marqueurs $D_\infty \subseteq C_\infty$ intersectant toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{S}_{\restriction C_\infty}$, mais tel que $\mu(C_\infty \setminus D_\infty) > 0$ si C_∞ est non nul (cf. proposition 1.36). Enfin, on pose

$$D = (A \setminus C) \cup D_f \cup D_\infty.$$

Par construction, D est un sous-ensemble strict de A qui intersecte toutes les $\mathcal{R}$-classes d'éléments de A. En particulier, son $[\mathcal{R}]$-saturé est égal à B, mais d'après le lemme précédent et le fait que A soit un atome au dessus de $M_{[\mathcal{R}]}$, D est égal à l'intersection de son $[\mathcal{R}]$-saturé avec A, donc égal à A, contradiction. Ainsi A est bien un domaine fondamental de la restriction de $\mathcal{R}$ à B.

Montrons maintenant la réciproque. Soit A un domaine fondamental pour la restriction de $\mathcal{R}$ au $\mathcal{R}$-saturé de A. Alors par définition du domaine fondamental, tout sous-ensemble de A est égal à l'intersection de son $[\mathcal{R}]$-saturé avec A, et donc par le lemme précédent A est un atome au dessus de $\mathcal{R}$. □

Théorème 1.45. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors son groupe plein est de type I ssi elle est finie, et de type II ssi elle est apériodique.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{R}$ soit finie, soit $B \subseteq X$, alors la restriction de $\mathcal{R}$ à B est toujours finie, et possède donc un domaine fondamental A, qui est également un domaine fondamental pour la restriction de $\mathcal{R}$ au $[\mathcal{R}]$-saturé de B. Par la proposition précédente, $A \subseteq B$ est donc un atome au dessus de $M_{[\mathcal{R}]}$. Ainsi, le groupe plein de $[\mathcal{R}]$ est de type I. Réciproquement, si $\mathcal{R}$ n'est pas finie, on considère $X_\infty = \{x \in X : |[x]_{\mathcal{R}}| = \infty\}$, alors la restriction de $\mathcal{R}$ à X_∞ est apériodique, et donc sa restriction à tout sous-ensemble de X_∞ ne peut avoir de domaine fondamental (corollaire 1.35), ce qui par la proposition précédente implique que $[\mathcal{R}]$ n'est pas de type I.

Concernant la seconde partie, $[\mathcal{R}]$ est de type II ssi il n'y a pas d'atomes au dessus de $M_{[\mathcal{R}]}$, ce qui d'après la proposition précédente est équivalent à demander l'absence de domaines fondamentaux pour les restrictions de $\mathcal{R}$. Mais par le corollaire 1.35, les restrictions de $\mathcal{R}$ n'ont pas de domaines fondamentaux ssi $\mathcal{R}$ est apériodique. □

Corollaire 1.46. *Soit G un groupe plein de type I. Alors G est le groupe plein d'une relation finie, et G est fermé pour la topologie faible.*

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe dénombrable dense dans G pour la topologie faible, et soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence engendrée par Γ. Le groupe plein engendré par Γ est alors égal à $[\mathcal{R}]$. Mais d'après le lemme 1.7, $M_{[\Gamma]} = M_G$, ainsi $[\mathcal{R}]$ est également de type I, et donc $\mathcal{R}$ est finie par la proposition précédente.

Soit A un domaine fondamental de $\mathcal{R}$ (lemme 1.34), et soit $f : X \to A$ qui à $x \in X$ associe l'unique élément de $A \cap [x]_{\mathcal{R}}$. Alors un élément φ de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est dans le groupe plein de $\mathcal{R}$ ssi pour presque tout $x \in X$, $f(\varphi(x)) = f(x)$. Une telle condition étant fermée pour la topologie faible, on déduit que $[\mathcal{R}]$ est fermé pour la topologie faible. Comme Γ est faiblement dense dans G et inclus dans $[\mathcal{R}]$, on a alors $G = [\mathcal{R}]$, donc G est le groupe plein d'une relation finie, et fermé pour la topologie faible. □

Définition 1.47. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ est de **type $\mathbf{I}_n$** si presque toutes ses classes sont de cardinalité n.

Proposition 1.48. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique relation d'équivalence p.m.p. de type I_n à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. de type I_n sur (X,μ). On peut une fois de plus supposer que $X = [0,1]$. On définit alors, pour $i \in \{1,...,n\}$, l'ensemble $A_i \subseteq X$ des $x \in X$ qui sont les i-èmes éléments de leur $\mathcal{R}$-classe d'équivalence pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Remarquons que par hypothèse, les A_i forment une partition de X. Ensuite, pour $i \in \{1,...,n\}$, notons $\varphi_i : A_1 \to A_i$ l'isomorphisme partiel de $\mathcal{R}$ envoyant chaque $x \in A_1$ sur le i-ème élément de sa classe d'équivalence. Notons que $\varphi_1 = \mathrm{id}_{A_1}$.

Soit $\mathcal{R}'$ une autre relation d'équivalence p.m.p. de type I_n sur (Y,ν). On peut lui appliquer le même raisonnement que $\mathcal{R}$ et construire une partition $(B_i)_{i=1}^n$ de Y ainsi que des isomorphismes partiels $\psi_1 = \mathrm{id}_{B_1}, \psi_2 : B_1 \to B_2, ..., \psi_n : B_1 \to B_n$ de $\mathcal{R}'$.

Comme les isomorphismes partiels préservent la mesure, A_1 et B_1 ont mesure $1/n$. On dispose alors par le corollaire A.16 d'une bijection p.m.p. $T : A_1 \to B_1$. On la prolonge alors en un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en envoyant A_i sur B_i via $\psi_i T \varphi_i^{-1}$. □

La proposition précédente nous permet de décrire concrètement le groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p. de type I_n.

Proposition 1.49. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. de type I_n et soit (Y,ν) un espace de probabilité standard sans atomes. Alors le groupe plein de $\mathcal{R}$ muni de la distance uniforme est isométrique au groupe $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$ [12] muni de la distance d^1_{ham}, où d_{ham} est la distance de Hamming sur $\mathfrak{S}_n$ définie par : pour tous $\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n$,*

$$d_{ham}(\sigma,\tau) = \frac{1}{n}\left|\{i \in \{1,...,n\} : \sigma(i) \neq \tau(i)\}\right|,$$

et où, en suivant la terminologie établie dans l'annexe C, la distance d^1_{ham} est définie par : pour tous $f,g \in \mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$,

$$d(f,g) = \int_Y d_{ham}(f(y),g(y))d\nu(y).$$

Démonstration. Soit (Y,ν) un espace de probabilité standard, soit m la mesure de comptage normalisée sur $\{1,...,n\}$. Soient enfin $(Z,\lambda) = (Y \times \{1,...,n\})$ et $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence de type I_n sur (Z,λ) définie par $(y,k)\,\mathcal{R}'(y',k')$ ssi $y = y'$. Comme $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont orbitalement équivalentes, il suffit de montrer que le groupe plein de $\mathcal{R}'$ s'identifie à $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$.

12. $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$ est le groupe des applications mesurables d'un espace de probabilité standard sans atomes (Y,ν) à valeurs dans dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, de telles applications étant identifiées à mesure nulle près ; le lecteur se référera à l'annexe C pour quelques faits de base concernant les groupes de ce type et leur topologie.

Soit donc T un élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}'$. Étant donné $y \in Y$, on dispose par définition d'une unique bijection $\sigma_y^T \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,

$$T((y,k)) = (y, \sigma_y(k)).$$

L'application $T \mapsto (y \mapsto \sigma_y^T)$ définit alors un morphisme surjectif Φ du pré-groupe plein de $\mathcal{R}'$ dans $\mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathfrak{S}_n)$. Par définition de la mesure produit, on a pour tous T et U appartenant au pré-groupe plein de $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} d_u(T,U) &= \int_Y m\left(\{k \in \{1, ..., n\} : T(y,k) \neq U(y,k)\}\right) d\nu(y) \\ &= \int_Y d_{ham}(\sigma_y^T, \sigma_y^U) d\nu(y) \\ d_u(T,U) &= d_{ham}^1(\Phi(T), \Phi(U)). \end{aligned}$$

Ainsi, le morphisme Φ passe au quotient en une isométrie entre le groupe plein de $\mathcal{R}'$ et $\mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathfrak{S}_n)$. □

5. Relations hyperfinies et groupes pleins approximativement finis

Nous allons maintenant établir une dernière conséquence de la proposition 1.48. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. finie. Alors tout atome au-dessus de $M_{\mathcal{R}}$ dont la $\mathcal{R}$-mesure conditionnelle est partout non nulle est un domaine fondamental de $\mathcal{R}$ par le théorème 1.44. Sa mesure conditionnelle vaut donc $1/n$ là où les classes de $\mathcal{R}$ sont de taille n. Autrement dit $M_{\mathcal{R}}$ encode le lieu où $\mathcal{R}$ est de type I_n. La proposition 1.48 nous dit alors que cette information détermine entièrement $\mathcal{R}$ à isomorphisme près. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 1.50 (Dye). *Deux relations d'équivalence p.m.p. finies $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sur (X, μ) sont isomorphes ssi il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tel que $\varphi(M_{\mathcal{R}}) = M_{\mathcal{R}'}$.*

Un des théorèmes les plus célèbres de H. Dye stipule que le corollaire précédent reste vrai pour les relations d'équivalence p.m.p. *hyperfinies*. On le prouvera à la fin du chapitre 2, il s'agit du théorème 2.28.

Définition 1.51. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. On dit que $\mathcal{R}$ est **hyperfinie** s'il existe un ensemble de mesure pleine en restriction auquel $\mathcal{R}$ s'écrit comme réunion croissante de relations d'équivalence p.m.p. finies : autrement dit il existe $(\mathcal{R}_n)$ suite croissante de relations d'équivalence p.m.p. finies telles que pour presque tout $x \in X$, $[x]_{\mathcal{R}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x]_{\mathcal{R}_n}$.

Donnons maintenant la définition originelle de l'hyperfinitude, qui vaut pour des groupes pleins arbitraires. Rappelons le corollaire 1.16 : si G est un groupe plein, $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, et $\epsilon \geqslant \inf_{U \in G} d_u(T, U)$, alors on dispose de $\tilde{T} \in G$ tel que $d_u(T, \tilde{T}) \leqslant \epsilon$. On dira alors que G **contient** T **à** ϵ **près**.

Définition 1.52 (Dye). Un groupe plein G est **approximativement fini** si pour tous $T_1, ..., T_n \in G$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-groupe plein $G' \subseteq G$ de type I qui contienne les T_i à ϵ près.

Remarque 1.53. Dans la définition précédente, il est clair qu'on peut se contenter de demander que le sous-groupe plein $G' \subseteq G$ soit de type I **borné**, c'est-à-dire que la relation d'équivalence à classes finies correspondante aie le cardinal de presque toutes ses classes borné par un entier fixé. Mieux, comme tout groupe plein de type I borné est contenu dans un groupe plein de type I_m pour un certain[13] $m \in \mathbb{N}$, on peut même demander que G' soit de type I_m.

Cette définition est à mettre en parallèle avec la notion d'algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie : une algèbre de von Neumann M de type II_1 est approximativement finie si toute famille finie d'éléments est approchée en norme 2 par un $\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \subseteq M$. Dans le cas des algèbres de von Neumann, le fait de d'imposer $\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \subseteq M$ est crucial : si on demande seulement $\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(M))$, on demande en fait que M satisfasse la conjecture de plongement de Connes. Dans notre cadre, nous allons au contraire voir que la restriction $G' \subseteq G$ n'est pas nécessaire.

PROPOSITION 1.54. *Soit G un groupe plein. Alors G est approximativement fini ssi pour tous $T_1, ..., T_n \in G$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un groupe plein G' de type I contenant les T_i à ϵ près.*

DÉMONSTRATION. L'implication directe est claire. Réciproquement, soit $\epsilon > 0$ et $T_1, ..., T_n \in G$. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. de type I dont le groupe plein contienne les T_i à ϵ près. Pour $i = 1, ..., n$, on note $A_i = \{x \in X : T_i(x)\,\mathcal{R}\,x\}$. Soit $\varphi_i = T_{i\restriction A_i}$, et soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence engendrée par les φ_i, elle est de type I, et contient les T_i à ϵ près par le corollaire 1.15. □

COROLLAIRE 1.55 ([**Dye59**, thm. 2]). *Tout sous-groupe plein d'un groupe plein approximativement fini est approximativement fini.*

Il s'agit maintenant de voir pourquoi, pour une relation d'équivalence p.m.p., être hyperfinie équivaut à avoir un groupe plein approximativement fini. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant, qui va nous permettre de construire par récurrence une suite croissante de sous-groupes pleins de type I dont la réunion sera dense. On utilisera implicitement le fait que tout isomorphisme partiel se prolonge en un élément du groupe plein (corollaire 1.15). La preuve que nous donnons est fortement inspirée de [**Dye59**, lem. 6.1].

LEMME 1.56. *Soit G_0 un groupe plein de type I_n contenue dans G approximativement fini, et $\epsilon > 0$. Alors pour tout $T \in G$, il existe un groupe plein G' de type I_m tel que $G_0 \subseteq G'$ et G' contienne T à ϵ près.*

DÉMONSTRATION. Comme G_0 est un groupe plein de type I_n, on peut par la proposition 1.48 supposer que G_0 est engendré par un automorphisme $T_0 \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ dont toutes les orbites sont de cardinalité n. On fixe $\delta > 0$, à déterminer plus tard. Soit $G_1 = [\mathcal{R}_1]$ un groupe plein de type I borné contenant T_0 et T à δ près.

Soit $B = \{x \in X : T_0(x)\,\mathcal{R}_1\,x \text{ et } T(x)\,\mathcal{R}_1\,x\}$, par définition de δ on a $\mu(B) \geqslant 1 - 2\delta$. Soit maintenant $C = \bigcap_{k=1}^n T_0^{-k}(B)$. Alors C est G_0-invariant et $\mu(C) \geqslant 1 - 2n\delta$.

Soit l'ensemble $D = C \cap T^{-1}(C)$, remarquons que sa mesure plus grande que $1 - 4n\delta$. On nomme alors $\mathcal{R}_2$ la relation d'équivalence engendrée par $T_{\restriction D}$ et T_0. Son groupe plein contient T à $4n\delta$ près, et $\mathcal{R}_2$ est finie car sur C (qui est $\mathcal{R}_2$-invariant), c'est une sous-relation de $\mathcal{R}_1$, tandis que sur $X \setminus C$ c'est $\mathcal{R}_0$. De plus elle est bornée, et on peut donc la mettre dans une relation de type I_m, où m est le ppcm des cardinaux des classes d'équivalence. Alors le groupe plein G' de cette dernière relation d'équivalence p.m.p. convient. □

PROPOSITION 1.57. *Une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ est hyperfinie ssi son groupe plein est approximativement fini.*

---

13. Par exemple, on peut prendre pour m le ppcm des cardinaux des classes d'équivalence de la relation d'équivalence p.m.p. associée.

Démonstration. Si $\mathcal{R} = \bigcup \mathcal{R}_n$ où les $\mathcal{R}_n$ sont à classes finies, la réunion croissante des groupes pleins des $\mathcal{R}_n$ est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}$ par le théorème 1.18, ce qui fournit le résultat.

Réciproquement, soit (T_n) dense dans $[\mathcal{R}]$ telle que chaque élément apparaisse une infinité de fois, et soit $\epsilon_n \to 0$. Une application répétée du lemme 1.56 à T_n et ϵ_n permet alors de conclure. □

Corollaire 1.58. *La réunion d'une suite croissante de relations d'équivalence p.m.p. hyperfinies est hyperfinie.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition qui précède et du théorème 1.18 qui nous assure qu'une réunion croissante de groupes pleins approximativement finis est dense dans le groupe plein qu'elle engendre, ce qui entraine que ce dernier est également approximativement fini. □

Corollaire 1.59. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p., alors $\mathcal{R}$ contient une sous-relation $\mathcal{R}'$ hyperfinie maximale*[14].

Démonstration. Par le lemme de Zorn, le groupe plein de $\mathcal{R}$ contient un groupe plein approximativement fini maximal. La proposition 1.57 et le corollaire 1.26 impliquent qu'un tel groupe plein est le groupe plein d'une relation d'équivalence hyperfinie maximale. □

Remarque 1.60 (Gaboriau). Une sous-relation hyperfinie maximale de $\mathcal{R}$ quelconque n'a pas forcément les mêmes ensembles invariants que $\mathcal{R}$. Par exemple, soit α l'action de $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{F}_2}$ par décalage de Bernoulli et β son action sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donnée par : a agit trivialement et b agit par décalage de Bernoulli sur $\{0,1\}^{\langle b\rangle}$. L'action produit $\alpha\times\beta$ est ergodique puisque $\langle b\rangle$ agit ergodiquement, mais $\langle a\rangle$ n'agit pas ergodiquement et engendre une relation hyperfinie maximale.

En effet, soit $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ hyperfinie contenant strictement $\mathcal{R}_{\langle a\rangle}$. Quitte à réduire $\mathcal{R}'$, on peut supposer que $\mathcal{R}'$ est engendrée par a et un isomorphisme partiel φ qui est la restriction d'un élément g de $\mathbb{F}_2$ à dom φ. Mais $\langle a, g\rangle$ est un sous-groupe du groupe libre qui ne peut être de rang 1, et donc $\{a, \varphi\}$ forme un arborage de $\mathcal{R}'$ de coût strictement plus grand que 1. Ainsi, $\mathcal{R}'$ ne peut être hyperfinie.

Cependant, nous verrons au cours du chapitre 2 (corollaire 2.22) qu'il existe toujours une sous-relation hyperfinie maximale ayant la même algèbre d'ensembles invariants que $\mathcal{R}$.

6. Extrême moyennabilité et groupes de Lévy

Définition 1.61. Soit G un groupe topologique. On dit que G est **extrêmement moyennable** si toute action *continue* de G sur un compact admet un point fixe.

Il y a à notre connaissance principalement deux manières de prouver l'extrême moyennabilité d'un groupe : la première, due à A. Kechris, V. Pestov et S. Todorcevic, s'applique aux groupes d'automorphismes de structures dénombrables et est reliée à des propriétés combinatoires de telles structures. La seconde, plus ancienne, fait appel à des méthodes de concentration de la mesure, et c'est celle que nous utiliserons indirectement en nous appuyant sur le théorème suivant (pour des rappels concernant L^0, cf. annexe C).

Théorème 1.62 (Glasner **[Gla98]**, Furstenberg-Weiss). *Soit K un groupe compact et (X,μ) un espace de probabilité standard sans atomes. Alors le groupe topologique $\mathrm{L}^0(X,\mu,K)$ est extrêmement moyennable.*

14. C'est-à-dire que toute relation hyperfinie incluse dans $\mathcal{R}$ et contenant $\mathcal{R}'$ est égale à $\mathcal{R}'$ sur un ensemble de mesure pleine.

On rappelle que la proposition 1.49 stipule que le groupe plein d'une relation $\mathcal{R}_n$ de type I_n s'identifie à $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$ où (Y,ν) est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_n$. Le théorème précédent implique donc le corollaire que voici.

COROLLAIRE 1.63. *Soit $\mathcal{R}$ une relation p.m.p. de type I. Alors son groupe plein est extrêmement moyennable.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{R}_n$ la restriction de $\mathcal{R}$ à l'ensemble des $x \in X$ dont la $\mathcal{R}$ classe est de cardinal n. Alors le groupe plein de $\mathcal{R}$ est égal au produit des groupes pleins des $\mathcal{R}_n$, et d'après la proposition 1.49 pour tout $n \in \mathbb{N}$ le groupe plein de $\mathcal{R}_n$ est isomorphe à $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$, où (Y,ν) est un espace de probabilité standard sans atomes. Or d'après le théorème 1.62, de tels groupes sont extrêmement moyennables. Ainsi $[\mathcal{R}]$ est extrêmement moyennable car c'est un produit de groupes extrêmement moyennables. □

Le théorème suivant généralise un résultat dû à T. Giordano et V. Pestov [**GP07**, prop. 5.3], établissant que le groupe plein d'une relation hyperfinie ergodique est extrêmement moyennable.

THÉORÈME 1.64. *Soit G un groupe plein approximativement fini. Alors G est extrêmement moyennable.*

DÉMONSTRATION. La preuve consiste en un argument de compacité classique. Soit K un compact, que l'on munit de l'unique structure uniforme $\mathcal{U}$ compatible avec sa topologie. On suppose que G agit continûment sur K. Étant donné $V \in \mathcal{U}$ fermé et une partie finie $\{T_1,...,T_n\}$ de G, on pose

$$F_{T_1,...,T_n,V} = \{x \in K : (x, T_i x) \in V \text{ pour } i = 1,...,n\}.$$

Chaque $F_{T_1,...,T_n,V}$ est fermé, non vide car chaque famille finie $T_1,...,T_n$ est arbitrairement proche d'un groupe extrêmement moyennable d'après le corollaire 1.63 et le fait que G soit approximativement fini. Comme la famille des $F_{T_1,...,T_n,V}$ est dirigée, l'intersection de tous ses éléments est par compacité non vide, et un élément de cette intersection est un point fixe pour l'action de G. □

REMARQUE 1.65. Dans le cas où G est le groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p., le fait que G soit un groupe polonais implique que l'on peut se restreindre aux actions sur les compacts métrisables, ce qui rend l'argument précédent plus lisible.

EXEMPLE 1.66. Soit $\mathbb{S}^1$ agissant sur lui même par translation, et soit G le groupe plein associé. Notons que G n'est pas le groupe de tous les automorphismes p.m.p. de $\mathbb{S}^1$ puisque la symétrie par rapport à un axe passant par 0 n'en fait pas partie. Comme $\mathbb{S}^1$ est abélien, tous les sous-groupes pleins séparables de $\mathbb{S}^1$ sont approximativement finis, donc G lui même est approximativement fini. Ainsi, (G, d_u) est un nouvel exemple de groupe extrêmement moyennable. Remarquons également que G n'est pas séparable puisque $\mathbb{S}^1$ en est un sous-ensemble discret.

Soit maintenant G un groupe plein provenant d'une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$. On a vu dans la proposition 1.57 que $\mathcal{R}$ est hyperfinie ssi G est approximativement fini. Ainsi, le théorème qui précède implique que si $\mathcal{R}$ est hyperfinie, alors son groupe plein est extrêmement moyennable. Le théorème suivant établit une réciproque, et généralise au cas non ergodique un résultat de T. Giordano et V. Pestov [**GP07**, thm. 5.7]. Un groupe topologique G est **moyennable** si toute action continue de G sur un compact préserve une mesure de probabilité.

THÉORÈME 1.67. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes :*

(1) $\mathcal{R}$ est hyperfinie.

(2) Le groupe plein de $\mathcal{R}$ est extrêmement moyennable.

(3) Le groupe plein de $\mathcal{R}$ est moyennable.

Démonstration. Le paragraphe qui précède établit que (1)⇒(2), et il est clair que (2)⇒(3). Pour (3)⇒(1), on utilise le même argument que dans [**GP07**, 5.3], que l'on se contente ici de résumer : le groupe plein agit continuement sur le champ des moyennes sur $\mathcal{R}$, et c'est une action continue par isométries affines sur un espace compact convexe. Comme $[\mathcal{R}]$ est moyennable, une telle action admet un point fixe, qui est une moyenne invariante sur $\mathcal{R}$. Ainsi $\mathcal{R}$ est moyennable, et donc par le théorème de Connes-Feldman-Weiss [**CFW81**], $\mathcal{R}$ est hyperfinie. □

Remarque 1.68. T. Giordano et V. Pestov établissent également que le groupe plein d'une relation hyperfinie ergodique est un groupe de Lévy, ce qui implique qu'il est extrêmement moyennable, et leur permet ainsi de montrer qu'une relation d'équivalence p.m.p. ergodique $\mathcal{R}$ est hyperfinie ssi

(4) Le groupe plein de $\mathcal{R}$ est un groupe de Lévy.

En utilisant le théorème de Dye (cf. théorème 2.28), leur résultat et le fait que $\mathrm{L}^0(X,\mu,\mathfrak{S}_n)$ est un groupe de Lévy, on peut voir que cette caractérisation reste valable dans le cas où $\mathcal{R}$ n'est pas ergodique.

Chapitre 2

Autour de l'odomètre

1. Un modèle de relation hyperfinie ergodique

Soit $\mathfrak{S}_{2^n}$ le groupe symétrique sur l'ensemble $\{0,1\}^n$. Un tel groupe est inclus naturellement dans $\mathfrak{S}_{2^{n+1}}$ via $\alpha_n : \mathfrak{S}_{2^n} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2^{n+1}}$ définie par $\alpha_n(\sigma)(x_1,...,x_{n+1}) = (\sigma(x_1,...,x_n), x_{n+1})$. On note $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ la réunion croissante $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}_{2^n}$, appelée groupe des **permutations dyadiques**. La propriété clé du groupe $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ est qu'il agit de manière p.m.p. sur $(X,\mu) = (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$, où $\mathcal{B}(1/2) = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ est la mesure de Bernoulli de paramètre $1/2$. L'action p.m.p. est la suivante : étant données $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{2^n}$, on pose

$$a(\sigma)(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma(x_1,...,x_n), x_{n+1}, x_{n+2}, ...).$$

Remarque 2.1. De manière à ne pas confondre $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ et son action a sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$, on notera $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty} = a(\mathfrak{S}_{2^\infty}) \leqslant \mathrm{Aut}(X,\mu)$ et $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^n} = a(\mathfrak{S}_{2^n}) \leqslant \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty}$.

La relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}_0$ engendrée par l'action de $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ est définie par

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{R}_0 (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ssi il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n = y_n \text{ pour tout } n \geqslant p.$$

Il est facile de voir qu'elle est hyperfinie, les relations finies croissantes dont elle est l'union étant les $\mathcal{R}'_p$ définies par

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{R}'_p (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ssi } x_n = y_n \text{ pour tout } n \geqslant p.$$

On peut aussi comprendre l'action de $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ en considérant l'algèbre des ouverts-fermés de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Étant donné un mot fini $s \in \{0,1\}^n$, on lui associe un **cylindre N_s de longueur** n défini par $N_s = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_{\restriction n} = s\}$. Notons qu'un cylindre de longueur n est de mesure $\frac{1}{2^n}$, et que c'est un ouvert-fermé de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. L'algèbre engendrée par de tels cylindres est dénombrable, on la note M_0, c'est l'algèbre des ouverts-fermés de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. En utilisant la régularité de μ, on peut voir que M_0 est dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. On a une action naturelle a de $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ sur M_0, définie de manière unique par

$$a(\sigma)N_{x_1,...,x_n,...,x_p} = N_{\sigma(x_1,...,x_n),...,x_p}$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $p \geqslant n$ et $(x_1,...,x_p) \in \{0,1\}^p$. Cette action par isométries s'étend alors de manière unique au complété de M_0, qui n'est d'autre que $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, et coïncide avec l'action définie précédemment [1]. Comme $\mathfrak{S}_{2^\infty}$ agit transitivement sur les cylindres de même longueur, on a la proposition suivante.

Proposition 2.2. *$\mathcal{R}_0$ est ergodique.*

Nous allons maintenant définir l'odomètre, qui engendre $\mathcal{R}_0$ à mesure nulle près, et que l'on peut voir comme comme “l'addition de $(1,0,0,0...)$ avec retenue à droite”.

Définition 2.3. Soit $T_0 \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$ l'**odomètre**, défini par : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, si n_0 est le premier entier n tel que $x_n = 0$, alors $T_0((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est

1. D'après l'annexe B, se donner une bijection p.m.p. de (X,μ) à mesure nulle près revient à se donner un automorphisme de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, ce que nous faisons ici.

la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 \\ x_n & \text{sinon.} \end{cases},$$

et s'il n'existe pas de tel entier n_0, i.e. si $(x_n) = (1, 1, ...)$ alors $T_0((1, 1, ...)) = (0, 0, ...)$.

Notons que l'odomètre T_0 peut aussi se définir à partir d'un automorphisme τ_0 de l'arbre binaire enraciné (identifié à l'ensemble $\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ des suites finies de 0 et de 1) comme prolongement continu de l'action d'un tel automorphisme sur les bouts de cet arbre. L'automorphisme τ_0 est souvent représenté comme sur la figure 1 ci-dessous. Pour bien comprendre cette figure, il faut voir qu'un automorphisme d'un arbre enraciné est entièrement déterminé par les permutations qu'il induit sur l'ensemble des enfants de chaque sommet, racine comprise. Pour l'arbre binaire enraciné, ces permutations sont soit des involutions échangeant 0 et 1, soit l'identité. On peut alors définir τ_0 comme l'unique automorphisme induisant une involution sur les fils de chaque sommet de la branche la plus à droite, et l'identité partout ailleurs.

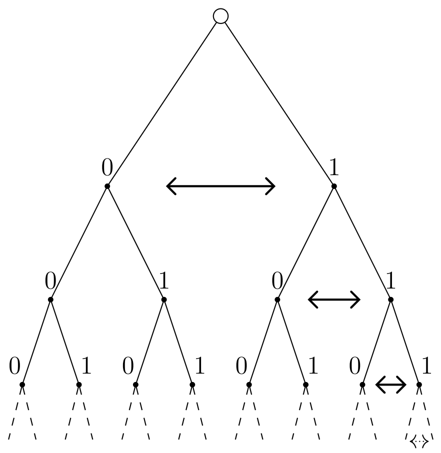

FIGURE 1. Action de l'automorphisme τ_0 sur l'arbre enraciné. L'odomètre correspond à l'action sur les bouts de l'arbre induite par τ_0.

Que peut-on dire sur le groupe plein de $\mathcal{R}_0$? On a vu que $\mathcal{R}_0 = \bigcup_{p\geqslant 1} \mathcal{R}'_p$ où $\mathcal{R}'_p$ est la relation d'équivalence "coïncider à partir du rang p". Par la proposition 1.18, la réunion croissante des groupes pleins des $\mathcal{R}'_p$ est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0$. Il s'agit donc maintenant de comprendre le groupe plein de $\mathcal{R}'_p$. Pour cela nous allons donner une version "concrète" de la proposition 1.49 en identifiant le groupe plein de $\mathcal{R}'_p$ au groupe $\mathrm{L}^0(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2), \mathfrak{S}_{2^p})$ des applications mesurables de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{S}_{2^p}$ identifiées à mesure nulle près.

Soit $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ un élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}_p$, c'est-à-dire un automorphisme borélien de X tel que pour tout $x \in X$, $T(x) \, \mathcal{R}'_p \, x$. Étant donné $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $s \in \{0, 1\}^p$, on doit avoir $T(s \frown y) \, \mathcal{R}'_p \, s \frown y$, ce qui implique que, si on écrit $T(s \frown y) = s' \frown y'$ avec $s' \in \{0, 1\}^p$ et $y' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, on a en fait $y' = y$. Comme T est une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, on dispose en fait pour tout $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ d'une permutation $\sigma^T_y \in \mathfrak{S}_{2^p}$ telle que pour tout $s \in \{0, 1\}^p$,

$$T(s \frown y) = \sigma^T_y(s) \frown y.$$

Ainsi, le groupe plein de $\mathcal{R}'_p$ s'identifie bien à $\mathrm{L}^0(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2), \mathfrak{S}_{2^p})$. Nous allons en déduire la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. *Le groupe $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty}$ des permutations dyadiques est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1.18, la réunion croissante des groupes pleins des $\mathcal{R}'_p$ est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0$, et il suffit donc d'approcher les éléments de $[\mathcal{R}'_p]$ par des éléments de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty}$.

Soient donc $p \in \mathbb{N}$ et T un élément du groupe plein de $\mathcal{R}'_p$. Dans cette démonstration, on voit systématiquement les éléments de $[\mathcal{R}'_p]$ comme des applications mesurables de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathfrak{S}_p$. En particulier, T est uniquement défini par la partition borélienne $(A_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2^p}}$ de X donnée par $A_\sigma = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \varphi(y) = \sigma\}$. Étant donné $\epsilon > 0$, on dispose alors, par densité de M_0 dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, d'une partition en ouverts-fermés $(B_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2^p}}$ de X telle que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{2^p}$, $\mu(A_\sigma \triangle B_\sigma) < \frac{\epsilon}{(2^p)!}$. Soit l la longueur maximale des cylindres dont les B_σ sont des réunions finies. L'élément $\tilde{T} \in [\mathcal{R}'_p]$ défini par

$$\tilde{T}(y) = \sigma \text{ pour tout } y \in B_\sigma$$

est ϵ-proche de φ pour la distance uniforme, et appartient à $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{p+l}}$. □

On va présenter encore deux autres manières de construire un odomètre. La première sera le prétexte d'une petite parenthèse sur les actions profinies, mais rendra également la seconde plus naturelle.

DÉFINITION 2.5. Soit Γ un groupe dénombrable, résiduellement fini. Soit (Γ_n) une suite décroissante de sous-groupes de Γ d'indice fini, dont l'intersection est $\{e\}$. Alors on a une suite de quotients Γ/Γ_n et des projections $\pi_n : \Gamma/\Gamma_{n+1} \to \Gamma/\Gamma_n$. La limite projective $X = \operatorname{proj\,lim} \Gamma/\Gamma_n$ peut être munie de la mesure limite des mesures de comptage renormalisées μ_n. On dispose alors d'une **action profinie** $\Gamma \curvearrowright (\operatorname{proj\,lim}_n \Gamma/\Gamma_n, \operatorname{proj\,lim}_n \mu_n)$.

Soit Γ un groupe dénombrable discret. Une action p.m.p. ergodique de Γ sur (X,μ) est dite **compacte** s'il existe un groupe compact K dont Γ est un sous-groupe dense et un sous-groupe fermé L de K telle que l'action de Γ sur (X,μ) soit conjuguée à l'action par translation à gauche sur $(K/L, \mu_{Haar})$. La proposition suivante est souvent prouvée en utilisant la caractérisation des actions compactes en termes de représentation de Koopman ; nous proposons ici une preuve directe élémentaire.

PROPOSITION 2.6. *Toute action profinie est compacte.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Gamma \curvearrowright (\operatorname{proj\,lim}_n \Gamma/\Gamma_n, \operatorname{proj\,lim}_n \mu_n)$ une action profinie. On pose, pour tout n, $\Gamma'_n = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma\Gamma_n\gamma^{-1}$qui est un sous-groupe d'indice fini de Γ puisque c'est le noyau de l'action de Γ sur Γ/Γ_n. On définit alors $K = \operatorname{proj\,lim} \Gamma/\Gamma'_n$. On a un plongement canonique $\phi : \Gamma \to K$ qui à un élément $\gamma \in \Gamma$ associe la suite des $\pi_n(\gamma)$ (où π_n est la projection $\Gamma \to \Gamma/\Gamma'_n$).

On note L l'ensemble des suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ telles que pour tout n, $g_n \in \pi_n(\Gamma_n)$. C'est un sous-groupe de K, fermé car c'est une intersection de fermés. Alors, l'action de Γ par translation à gauche sur K/L s'identifie niveau par niveau avec l'action de Γ sur Γ/Γ_n : ce sont donc deux actions profinies conjuguées. □

REMARQUE 2.7. La preuve revient essentiellement à dire que si N est un sous-groupe distingué de Γ inclus dans un sous-groupe Λ quelconque, alors $\Gamma/\Lambda \simeq (\Gamma/N)/(\Lambda/N)$.

Nous pouvons maintenant revenir à l'odomètre et montrer que c'est un exemple d'action profinie.

PROPOSITION 2.8. *Soit $\mathbb{Z}_2 = \operatorname{proj\,lim} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ le groupe des entiers dyadiques. Alors l'odomètre est conjugué à l'action par translation de $1 \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}_2$.*

DÉMONSTRATION. Tout entier dyadique $x \in \mathbb{Z}_2$ s'écrit de manière unique comme une série $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n x_n$. L'application $x \in \mathbb{Z}_2 \mapsto (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est alors une bijection p.m.p. conjuguant la translation par 1, qui s'écrit $1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + \cdots$, et l'odomètre, vu comme "l'addition de $(1, 0, 0, \cdots)$ avec retenue à droite ". $\square$

La définition qui suit est une formulation différente de la notion de *ladder* introduite par Y. Katznelson et B. Weiss dans [**KW91**].

DÉFINITION 2.9. Une **échelle** de **hauteur** k est un isomorphisme partiel de (X, μ) tel que si $B = X \setminus \mathrm{img}\, \varphi$, alors $\mathrm{dom}\, \varphi = \bigsqcup_{i=0}^{k-2} \varphi^i(B)$ et $X = \bigsqcup_{i=0}^{k-1} \varphi^i(B)$. L'ensemble B sera appelé la **base** de l'échelle. La partition $X = \bigsqcup_{i=0}^{k-1} \varphi^i(B)$ sera appelée la **partition induite** par l'échelle φ, et l'algèbre de mesure finie engendrée par cette partition est l'**algèbre engendrée** par φ.

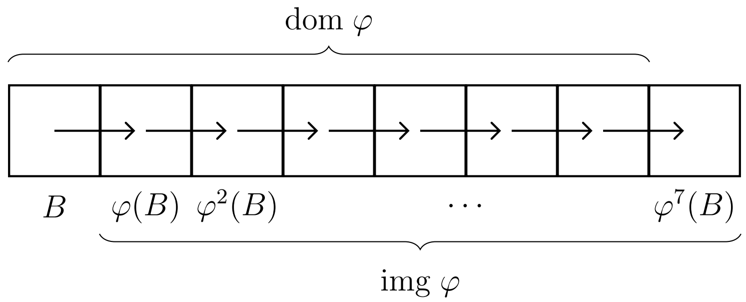

FIGURE 2. Une échelle φ de hauteur 8

DÉFINITION 2.10. Soient φ et ψ deux échelles. On dit que ψ **prolonge** φ si $\varphi = \psi_{\restriction \mathrm{dom}\, \varphi}$.

PROPOSITION 2.11. *Soient φ et ψ deux échelles telles que ψ prolonge φ. Alors la base de ψ est incluse dans la base de φ, et la hauteur de ψ est un multiple de la hauteur de φ.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que l'on est forcément dans la situation décrite par la figure 4 qui se trouve dans la section 3 du chapitre présent. Comme $\mathrm{img}\, \varphi \subseteq \mathrm{img}\, \psi$ et comme la base d'une échelle est le complémentaire de son image, la base B de ψ est bien un sous-ensemble de la base A de φ. Soit k la hauteur de φ, alors comme ψ prolonge φ on a que pour i allant de 0 à $k-1$, $\psi^i(B) = \varphi^i(B)$ est un sous-ensemble de $\varphi^i(A)$. En particulier $\psi^{k-1}(B) \subseteq \varphi^{k-1}(A)$, donc $\psi^{k-1}(B)$ est disjoint de $\mathrm{dom}\, \varphi$. Mais alors $\psi(\psi^{k-1})(B)$ est disjoint de $\mathrm{img}\, (\varphi)$, car ψ est injective et prolonge φ.

Donc $\psi^k(B) \subseteq A$, et on montre ainsi par récurrence que pour tout i inférieur ou égal à la hauteur de ψ, on a l'inclusion $\psi^i(B) \subseteq \varphi^{i \mod k}(A)$. Comme $\mathrm{dom}\, \varphi \subseteq \mathrm{dom}\, \psi$, on en déduit que la hauteur de φ divise la hauteur de ψ. $\square$

EXEMPLE 2.12. Soit l'action profinie $T \in \mathrm{Aut}(\mathrm{proj}\lim \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, \mathrm{proj}\lim_n \mu_n)$ donnée par la translation par $1 \in \mathbb{Z}$, dont on a vu dans la proposition 2.8 qu'elle est conjuguée à l'odomètre T_0. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, on peut considérer la restriction de T à l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathrm{proj}\lim \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ telles que $x_k \neq -1$, qui est une échelle de hauteur 2^k. On obtient ainsi une suite d'échelles de plus en plus fines qui converge vers T. Par conjugaison, on obtient également une suite d'échelles $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$ qui converge vers l'odomètre. Remarquons que de plus, l'algèbre engendrée par ψ_k est l'algèbre engendrée par les cylindres de longueur k. La réunion des algèbres engendrées par les ψ_k est donc dense dans $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$.

La proposition suivante nous montre que l'exemple précédent est canonique, i.e. que l'odomètre est en fait la seule manière de raffiner des échelles.

PROPOSITION 2.13. *Soit* (φ_k) *une suite d'échelles de hauteur* 2^k *se prolongeant successivement, et telles que la réunion croissante des algèbres qu'elles engendrent soit dense dans* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$*. Alors* $\varphi = \lim_k \varphi_k$ *est conjugué à l'odomètre.*

DÉMONSTRATION. Soit (ψ_k) la suite d'échelles obtenues en restreignant l'odomètre à $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus N_{1^k}$ (cf. exemple 2.12). Pour $k \in \mathbb{N}$, on construit un isomorphisme entre l'algèbre engendrée par φ_k et l'algèbre engendrée par ψ_k qui conjugue les actions de φ_k et ψ_k sur ces sous-algèbres. On note A_k la base de φ_k, et B_k la base de ψ_k, l'isomorphisme est défini en envoyant $\varphi_k^i(A_k)$ sur $\psi_k^i(B_k)$.

Le fait que les échelles se raffinent et la définition de ces isomorphismes implique qu'ils se prolongent successivement. Comme la réunion croissante des algèbres engendrées par les φ_k est dense, à la limite on a un isomorphisme entre deux sous-algèbres denses qui conjugue l'odomètre à la limite des φ_k. Cet isomorphisme s'étend de manière unique en une véritable conjugaison. $\square$

2. Un modèle de relation hyperfinie apériodique

Soit (Y,ν) un espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes. Soient $X = Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mu = \nu \otimes \mathcal{B}(1/2)$ où $\mathcal{B}(1/2) = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ est la mesure de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors (X,μ) est un espace de probabilité standard, que l'on munit de la relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}_0^Y = \mathrm{id}_Y \times \mathcal{R}_0$, c'est-à-dire que

$$(y,(x_n)_{n\in\mathbb{N}})\, \mathcal{R}_0^Y (y',(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow y = y' \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, x_n = x'_n.$$

Notons que $\mathcal{R}_0^Y$ est engendrée par $T_0^Y = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre. La proposition suivante fait appel au groupe des applications mesurables de Y dans $[\mathcal{R}_0]$ identifiées à mesure nulle près ; pour des rappels concernant cet espace, on consultera l'annexe C.

PROPOSITION 2.14. *Le groupe plein de* $\mathcal{R}_0^Y$ *muni de la distance uniforme s'identifie isométriquement à* $(\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0]), d_u^1)$*, où* d_u^1 *est définie par : pour tous* $f,g : Y \to [\mathcal{R}_0]$,

$$d_u^1(f,g) = \int_Y d_u(f(y),g(y))d\nu(y).$$

DÉMONSTRATION. Soient φ un élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, et π la projection $Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On note $\lambda = \mathcal{B}(1/2)$ la mesure de Bernoulli de paramètre $1/2$. Soit alors pour $y \in Y$, $\varphi_y : z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \pi(\varphi(y,z))$. Alors pour tout $y \in Y$, φ_y est un élément du pré-groupe plein de $\mathcal{R}_0$, qui passe au quotient en une application $\tilde\varphi_y \in [\mathcal{R}_0]$. Pour voir que l'application $y \mapsto \tilde\varphi_y$ définit un élément de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$, il suffit de vérifier qu'elle est mesurable. Comme $[\mathcal{R}_0]$ est séparable, il suffit de montrer que l'image réciproque de toute boule dans $[\mathcal{R}_0]$ est mesurable. Soient donc $\psi \in [\mathcal{R}_0]$ et $\epsilon > 0$, on a $d_u(\tilde\varphi_y,\psi) < \epsilon$ ssi $\lambda(\{z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \varphi(y,z) = \psi(z)\}) < \epsilon$. Comme l'ensemble A des couples $(y,z) \in Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $\varphi(y,z) = \psi(z)$ est mesurable, le théorème de Fubini nous assure donc la fonction qui à y associe $\lambda(A_y)$ est mesurable, autrement dit que $y \mapsto \lambda(\{z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \varphi(y,z) = \psi(z)\}) = d_u(\tilde\varphi_y,\psi)$ est mesurable, ce qu'il fallait démontrer.

Nous obtenons ainsi un morphisme de groupes du pré-groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ à valeur dans $\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$ qui passe au quotient en un morphisme $\Phi : [\mathcal{R}_0^Y] \to \mathrm{L}^0(Y,\nu[\mathcal{R}_0])$. Ce morphisme est une isométrie puisque par le théorème de Fubini, pour tous $S,T \in [\mathcal{R}_0^Y]$, on a

$$\begin{aligned}
d_u(S,T) &= \nu \otimes \lambda(\{(y,z) \in Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} : S(y,z) \neq T(y,z))\}) \\
&= \int_Y \lambda(\{z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : S(y,z) \neq T(y,z)\}) d\nu(y) \\
&= \int_Y d_u(\Phi(S)(y), \Phi(T)(y)) d\nu(y) \\
&= d_u^1(\Phi(S), \Phi(T)).
\end{aligned}$$

La surjectivité de l'isométrie Φ peut ensuite se voir en utilisant la partie dense de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$ donnée par la proposition C.5, dont les éléments sont réalisés par des éléments du pré-groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. Plus précisément, une partie dense de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$ est donnée par l'ensemble des applications $Y \to [\mathcal{R}_0]$ à image dénombrable. Or, si $f : Y \to [\mathcal{R}_0]$ est une telle application, on dispose par définition d'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[\mathcal{R}_0]$ et d'une partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y telle que pour tout $y \in A_n$, $f(y) = T_n$. Il est alors clair que l'application $T : Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue en recollant les $\mathrm{id}_{A_n} \times T_n$ définit un élément de $[\mathcal{R}_0^Y]$ dont l'image par Φ est f, d'où la surjectivité de Φ. □

Remarque 2.15. La preuve précédente n'utilise rien de spécifique sur $\mathcal{R}_0$, de sorte que la proposition reste vraie pour $\mathcal{R}^Y = \mathrm{id}_Y \times \mathcal{R}$ construite à partir de $\mathcal{R}$ p.m.p. quelconque, ce qui généralise la proposition 1.49.

Ce qui suit nous sera utile pour trouver des générateurs topologiques du groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$.

Proposition 2.16. *Soit M_0 une sous-algèbre dense de* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$. *Alors la réunion croissante en $n \in \mathbb{N}$ des groupes des applications M_0-mesurables à valeurs dans $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^n}$ est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$.*

Démonstration. Par la proposition 2.4, le groupe $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty}$ des permutations dyadiques est dense dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0$. Or la proposition précédente nous dit que le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est isomorphe à $\mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$, et d'après la proposition C.5, les applications M_0-mesurables à valeur dans un sous-ensemble fini de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^\infty}$ sont denses dans $[\mathcal{R}_0^Y] = \mathrm{L}^0(Y,\nu,[\mathcal{R}_0])$, d'où le résultat. □

Donnons maintenant l'analogue de la proposition 2.13 dans le cas non ergodique. La preuve est essentiellement la même.

Proposition 2.17. *Fixons une sous-algèbre fermée $N =$ $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. On suppose donnée une suite (φ_k) d'échelles de hauteur 2^k se raffinant successivement, telles que chaque φ_k préserve la mesure conditionnelle par rapport à* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, *et que la réunion croissante des algèbres engendrées par φ_k et* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ *soit dense dans* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. *Alors la limite des φ_k est conjuguée à $\mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre, et ce via un isomorphisme au dessus*[2] *de* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

Démonstration. Soit (ψ_k) la suite des échelles sur $(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ obtenues en restreignant $\mathrm{id}_Y \times T_0$ à $Y \times (\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus N_{1^k})$.

Comme pour la preuve de la proposition 2.13, on construit une suite d'isomorphismes $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ entre l'algèbre engendrée par φ_k et l'algèbre engendrée par les cylindres de longueur k sur $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2)) \subseteq \mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$, qui conjugue les

2. Un isomorphisme au dessus de $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ est un isomorphisme qui préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ (cf. la proposition D.2 et le paragraphe qui la suit).

actions de φ_k et ψ_k sur ces sous-algèbres, et qui se prolongent successivement. Plus précisément, si on note A_k la base de φ_k, l'isomorphisme Φ_k est défini sur les atomes de l'algèbre engendrée par φ_k par

$$\Phi_k(\varphi_k^i(A_k)) = Y \times T_0^k(N_{0^k})$$

pour $i = 0, ..., 2^k - 1$. Soit M_k l'algèbre engendrée par φ_k et $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$. On prolonge le domaine de définition de chaque Φ_k à M_k en posant, pour $B \in \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ et $i \in \{0, ..., 2^k - 1\}$,

$$\Phi_k(B \cap \varphi_k^i(A_k)) = B \times T_0^k(N_{0^k}).$$

Comme la réunion croissante des algèbres engendrées par les φ_k et $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ est dense dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$, on obtient à la limite un isomorphisme Φ entre deux sous-algèbres denses qui conjugue $\mathrm{id}_Y \times T_0$ à la limite des φ_k. Cet isomorphisme s'étend de manière unique en une véritable conjugaison. □

REMARQUE 2.18. Soient φ et ψ deux échelles, la première étant de hauteur 2^k, et la deuxième de hauteur 2^{k+l}. On suppose que ψ prolonge φ, alors en restreignant ψ on dispose d'une suite finie d'échelles intermédiaires $(\varphi_i)_{i=1}^l$ telles que $\varphi \subseteq \varphi_1 \subseteq \cdots \subseteq \varphi_l \subseteq \psi$, où φ_i est de hauteur 2^{k+i}. Ainsi, la conclusion de la proposition précédente s'applique également si on dispose seulement d'une suite croissante (φ_i) d'échelles de hauteur 2^{k_i} telles que chaque φ_i préserve la mesure conditionnelle par rapport à N, et que la réunion croissante des algèbres engendrées par φ_i et $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ soit dense dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$.

3. Décomposition ergodique et sous-relation hyperfinie

Dans cette section, nous allons établir un théorème de décomposition ergodique pour les relations d'équivalence p.m.p. (théorème 2.21) qui découlera d'un énoncé général sur les groupes pleins. Notre résultat est plus faible que le théorème de décomposition ergodique uniforme, établi par Varadarajan **[Var63]** qui, étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ à classes dénombrables sur un borélien standard X, fournit une application de X dans l'ensemble des mesures de probabilités $\mathcal{R}$-ergodiques qui sera la désintégration de *toute* mesure $\mathcal{R}$-invariante. Ici, le fait de désintégrer la seule mesure μ en travaillant directement dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ simplifie considérablement la preuve, tout en fournissant un énoncé suffisamment fort pour couvrir nos besoins.

Soit donc G un groupe plein sur un espace de probabilité standard (X, μ). Soit M_G l'algèbre des ensembles G-invariants, on dispose de (Y, ν) espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes tel que M_G soit isomorphe à $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$. Quitte à fixer un tel isomorphisme, on peut supposer que $M_G = \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$. D'après le corollaire D.4, si G est de type II, alors $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est isomorphe à $\mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$, et ce via un isomorphisme *au dessus* de $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$, c'est-à-dire un isomorphisme préservant la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ (cf. proposition D.2 pour une autre condition équivalente). Le théorème suivant raffine ce résultat en permettant de construire un tel isomorphisme qui de plus conjugue G à un groupe contenant le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$.

THÉORÈME 2.19. *Soit G un groupe plein de type II, soit $M_G = \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ l'algèbre des ensembles G-invariants. Alors il existe un isomorphisme entre* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ *et* $\mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ *au dessus de* $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ *qui conjugue G à un groupe plein G' contenant le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, où $\mathcal{R}_0^Y$ est définie par*

$$(y, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}))\, \mathcal{R}_0^Y (y', (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow y = y' \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, x_n = x'_n.$$

DÉMONSTRATION. Par la remarque 2.18, pour conjuguer G à un groupe plein contenant le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, il suffit de trouver une suite d'échelles $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [[G]]^{\mathbb{N}}$ de

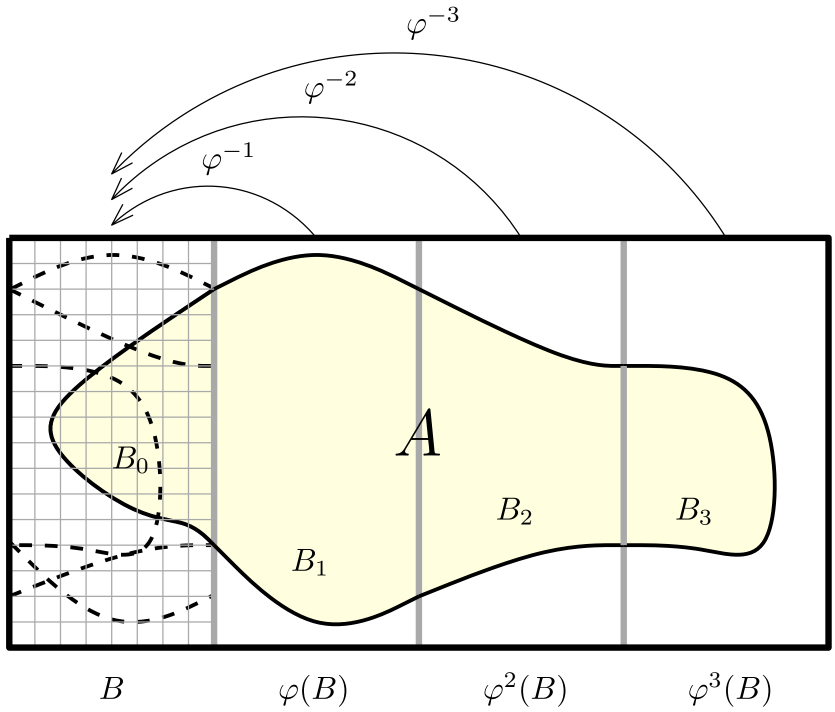

FIGURE 3. Comment approcher A. Tout est ramené en B via φ^{-1}, φ^{-2} et φ^{-3}. Les petits carrés sont les C_j.

hauteur 2^{k_i} telles que la réunion croissante des algèbres engendrées par φ_i et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ soit dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. De plus, le fait que G préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ nous garantira que la conjugaison obtenue préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, c'est-à-dire que c'est un isomorphisme au dessus de $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$

Soit donc $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dense d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ où chaque terme apparait une infinité de fois. Pour que la réunion croissante des algèbres engendrées par φ_i et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ soit dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, il suffit que l'algèbre engendrée par φ_i et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ contienne A_i à ϵ_i près, avec $\epsilon_i\to 0$. Autrement dit, il suffit de prouver le lemme suivant, qui permet de construire de tels φ_i par récurrence.

LEMME 2.20. *Soit $\varphi\in[[G]]$ une échelle de hauteur 2^k. Alors pour tout $A\in\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $\epsilon>0$, il existe $l\in\mathbb{N}$ et une échelle $\psi\in[[G]]$ de hauteur 2^{k+l} prolongeant φ, telle que l'algèbre engendrée par ψ et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ contienne A à ϵ près.*

Soit B la base de φ. Pour i allant de 0 à 2^k-1, soit $B_i=A\cap\varphi^i(B)$, et on considère la sous-algèbre M de $\mathrm{MAlg}(B,\frac{\mu}{\mu(B)})$ engendrée par les $\varphi^{-i}(B_i)$.

Comme B est de mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ constante, on peut voir $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ comme une sous-algèbre de $\mathrm{MAlg}(B,\frac{\mu}{\mu(B)})$ via $D\subseteq Y\mapsto D\cap B$. Le corollaire D.4 nous dit alors que l'inclusion $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)\subseteq\mathrm{MAlg}(B,\mu_B)$ est isomorphe à l'inclusion naturelle de $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ dans $\mathrm{MAlg}(Y\times\{0,1\}^{\mathbb{N}},\nu\otimes\lambda)$. Dans $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mathcal{B}(1/2))$, on dispose d'une sous-algèbre dénombrable dense $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}M_n$, où M_n est l'algèbre engendrées par les cylindres de longueur n. Soit alors $N_n\subseteq\mathrm{MAlg}(Y\times\{0,1\}^{\mathbb{N}},\nu\otimes\mathcal{B}(1/2))$ l'algèbre engendrée par M_n et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$. La réunion croissante des N_n est dense dans $\mathrm{MAlg}(Y\times\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mu\otimes\mathcal{B}(1/2))$, ce qui permet d'approcher avec une précision arbitraire les éléments de M par des élément de N_n. Autrement dit, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que N_p contienne à $\epsilon/2^k$ près tous les éléments de M.

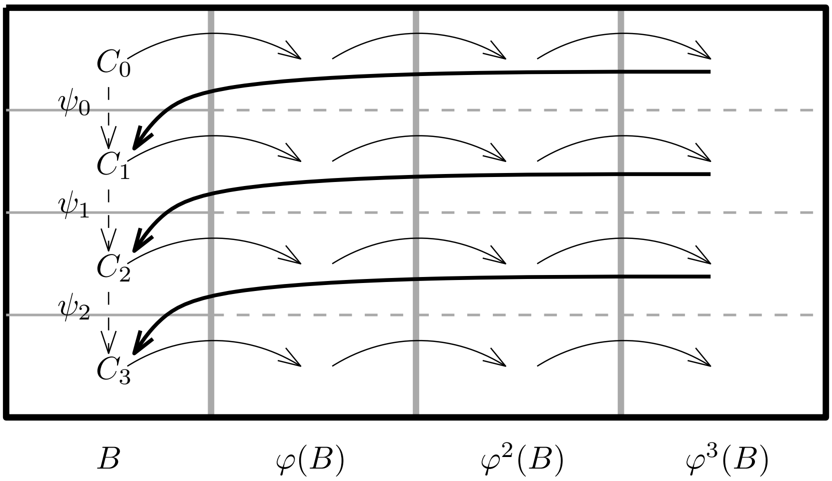

FIGURE 4. Comment prolonger φ en ψ. Les flèches grasses correspondent à $\psi \setminus \varphi$, les flèches bombées correspondent à φ.

Soient $C_1, ...C_{2^p}$ les atomes de N_p, leurs mesures conditionnelles par rapport à Y sont identiques et constantes et tout élément de M est approché à $\epsilon/2^k$ près par un élément de l'algèbre engendrée par $C_1, ..., C_{2^p}$ et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ (cf. figure 3).

Comme les mesures conditionnelles des C_j sont identiques, on dispose d'éléments $\psi_j \in [[G]]$ de domaine C_j et d'image C_{j+1}. Il suffit alors de recoller les $(\psi_j \varphi^{-2^k+1})$ à φ de manière à obtenir un prolongement ψ de φ (cf. figure 4). Comme tout élément de M est approché à $\epsilon/2k_i$ près par un élément de l'algèbre engendrée par $C_1, ..., C_{2^p}$ et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, l'élément A est approché à ϵ près par un élément de l'algèbre engendrée par ψ et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ (cf. figure 3). $\square$

On peut reformuler le théorème qui précède dans le cadre des relations d'équivalence p.m.p..

THÉORÈME 2.21. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique. Alors il existe un espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes (Y,ν) et une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}'$ sur $(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ telle que $\mathcal{R}$ soit isomorphe à $\mathcal{R}'$ et*

(1) $\mathcal{R}'$ contienne la relation d'équivalence p.m.p. hyperfinie $\mathcal{R}_0^Y$ définie par

$$(y,(x_n)_{n\in\mathbb{N}})\, \mathcal{R}_0^Y\, (y',(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow y = y' \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, x_n = x'_n.$$

(2) $\mathcal{R}'$ soit incluse dans la relation d'équivalence “avoir la même projection sur Y”.

(3) La décomposition ergodique de $\mathcal{R}'$ soit $y \mapsto \delta_y \otimes \mathcal{B}(1/2)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{R}$ apériodique sur $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, alors son groupe plein est de type II (proposition 1.45). Le théorème précédent nous fournit alors un isomorphisme T d'algèbres de mesure entre $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $\mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ qui conjugue le groupe plein de $\mathcal{R}$ à un groupe plein G' contenant le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. Comme T préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, le groupe G' préserve également la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

Soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence p.m.p. sur $Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont G' est le groupe plein, et soit Γ un groupe dénombrable l'engendrant. L'isomorphisme T est alors une équivalence orbitale entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ car il conjugue leurs groupes pleins (proposition 1.30).

Comme G' préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, d'après le théorème D.6 les éléments de Γ préservent les fibres au dessus de Y presque sûrement. Ainsi à mesure nulle près la relation $\mathcal{R}'$ est une sous-relation de la relation d'équivalence "avoir la même projection sur Y", ce qui établit le point (2). De plus, comme le groupe plein de $\mathcal{R}'$ contient le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, $\mathcal{R}'$ contient $\mathcal{R}_0^Y$, donc (1) est également vérifié.

Enfin, il est clair que l'algèbre des ensembles $\mathcal{R}'$-invariants s'identifie à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, et la désintégration du facteur associé $\pi : (Y \times Z, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2)) \to (Y,\nu)$ est $y \mapsto \delta_y \otimes \mathcal{B}(1/2)$ (on a en effet une décomposition en produit). Or chaque mesure $\delta_y \otimes \mathcal{B}(1/2)$ est bien ergodique puisque $\mathcal{R}'$ contient $\mathcal{R}_0^Y = \mathcal{R}_0 \times \mathrm{id}_Y$ et que $\mathcal{R}_0$ est ergodique [3]. □

Corollaire 2.22. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p., alors $\mathcal{R}$ contient une sous-relation $\mathcal{R}'$ hyperfinie maximale qui a la même algèbre d'ensembles invariants [4] que $\mathcal{R}$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que la restriction de $\mathcal{R}$ à la réunion de ses classes finies est hyperfinie, donc il suffit de traiter le cas où $\mathcal{R}$ est apériodique. Son groupe plein est alors de type II d'après la proposition 1.45, et donc par le théorème 2.19 il contient un groupe plein approximativement fini G ayant la même algèbre d'ensembles invariants. Le lemme de Zorn permet ensuite de trouver un sous-groupe plein H de $[\mathcal{R}]$ approximativement fini maximal contenant G. Puisque le groupe plein H contient G et est inclus dans $[\mathcal{R}]$, il a la même algèbre d'ensembles invariants que $[\mathcal{R}]$. Alors comme H est séparable et approximativement fini maximal, c'est le groupe plein d'une sous-relation hyperfinie maximale $\mathcal{R}'$ d'après le corollaire 1.26 et la proposition 1.57, et $\mathcal{R}'$ a bien la même algèbre d'ensembles invariants que $\mathcal{R}$. □

4. Lemme de Rohlin et théorème de Dye

Commençons par revenir sur quelques notions de base de théorie ergodique.

Lemme 2.23 (Poincaré). *Soit T un élément de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, et soit $A \subseteq X$ non nul. Alors pour presque tout $x \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n(x) \in A$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble B des $x \in A$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $T^n(x) \notin A$. Alors $B = A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} T^{-n}(X \setminus A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $T^{-n}(B) \subseteq T^{-n}(A)$ disjoint de $B \subseteq T^{-n}(X \setminus A)$. Mais ceci implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T^{-(n+m)}(B)$ est disjoint de $T^{-m}(B)$, et donc tous les $T^{-i}(B)$ pour $i \in \mathbb{N}$ sont disjoints d'égale mesure. Comme μ est une mesure de probabilité, ils sont tous de mesure nulle, et en particulier $\mu(B) = 0$. □

Remarque 2.24. Le fait que T soit une bijection n'est pas utile, seul le fait que μ soit préservée est important.

Le lemme de Poincaré implique que, pour $A \subseteq X$ non nul et $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, on peut définir un **temps de premier retour** en A par $\tau_{A,T}(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : T^n(x) \in A\}$ pour $x \in A$. Cela nous permet de faire la définition suivante, qui nous sera utile au cours de la preuve du théorème de Dye.

Définition 2.25. Soit $A \subseteq X$ et $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. L'**application de premier retour** induite par T sur A, notée T_A, est définie par

$$T_A(x) = \begin{cases} T^{\tau_{A,T}}(x) & \text{si } x \in A \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Rappelons que le théorème de décomposition ergodique dit que la désintégration associée à l'algèbre des ensembles $\mathcal{R}$-invariants ne fait intervenir μ-presque partout que des mesures ergodiques (cf. [**Gla03**, thm. 8.7]).

4. Autrement dit, $\mathcal{R}'$ a la même décomposition ergodique que $\mathcal{R}$.

DÉFINITION 2.26. Soit $B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul et $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $B_{n,T} = \{x \in B : \tau_{B,T}(x) = n\}$. Alors $(B_{n,T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de B et on dit que c'est la **partition de Kakutani-Rohlin** de B associée à T.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. La **tour de Kakutani-Rohlin** induite par T et B de **hauteur** n, notée $\mathfrak{t}_{B,T,n}$, est la réunion d'ensembles disjoints

$$\mathfrak{t}_{B,T,n} = \bigsqcup_{m=0}^{n-1} T^m(B_{n,T}).$$

Notons que la famille des tours de Kakutani-Rohlin induites par T et A est une partition du T-saturé de A. Nous pouvons maintenant démontrer le lemme de Rohlin. Rappelons que si $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, on note M_T l'algèbre des ensembles T-invariants, et μ_T la mesure conditionnelle associée.

LEMME 2.27. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodique, soit $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tel que $A, T(A), ..., T^{N-1}(A)$ soient disjoints et*

$$\mu_T(X \setminus \bigsqcup_{i=0}^{N-1} T^i(A)) \leqslant \epsilon.$$

DÉMONSTRATION. Notons μ_T la mesure conditionnelle associée aux ensembles T-invariants. Comme T est apériodique, l'inclusion $M_T \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est de type II (proposition 1.44) et on dispose donc de $B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tel que $\mu_T(B)$ soit constante égale à ϵ/N (proposition D.1). En particulier le T-saturé de B est X tout entier. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \bigsqcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{N} \rfloor} T^{N(i-1)}(B_{n,T})$$

et $C_n = \bigsqcup_{j=N\lfloor \frac{n}{N} \rfloor}^{n-1} T^j(B_{n,T})$. Alors la tour de Kakutani-Rohlin de hauteur n s'écrit comme réunion disjointe

$$\mathfrak{t}_{B,T,n} = \bigsqcup_{j=0}^{n-1} T^j(B_{n,T}) = \left(\bigsqcup_{i=0}^{N-1} T^i(A_n)\right) \sqcup C_n.$$

Soit donc $A = \bigsqcup_{n\geqslant N} A_n$. Alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ les ensembles A_n,$T(A_n)$,..., $T^{N-1}(A_n)$ sont disjoints et inclus dans la tour de Kakutani-Rohlin $\mathfrak{t}_{B,T,n}$, et comme les $\mathfrak{t}_{B,T,n}$ sont disjointes, les ensembles $A, T(A), ..., T^{N-1}(A)$ sont également disjoints. Il s'agit de voir que $\mu_T(X \setminus \bigsqcup_{n=0}^{N-1} T^n(A)) \leqslant \epsilon$. On a

$$X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_{B,T,n} = (\bigsqcup_{n=0}^{N-1} T^n(A)) \sqcup (\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n),$$

mais chaque C_n est de mesure conditionnelle plus petite que $N\mu_T(B_{n,T})$, or $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n,T} = B$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_T(C_n) \leqslant N\mu_T(B) = \epsilon$. □

THÉORÈME 2.28 (Dye). *Soient T et T' deux éléments apériodiques de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, on note $M_T, M_{T'} \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ les algèbres d'ensembles invariants associées. Supposons que M_T soit isomorphe à $M_{T'}$. Alors les relations d'équivalence p.m.p. qu'ils engendrent sont également isomorphes. En particulier, toutes les actions p.m.p. ergodiques de $\mathbb{Z}$ sont orbitalement équivalentes.*

REMARQUE 2.29. Comme T et T' sont apériodiques, $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est sans atome au dessus de M_T et de $M_{T'}$. Ainsi, d'après le théorème D.3, les inclusions $M_T \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $M_{T'} \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ sont isomorphes, et l'énoncé ci-dessus est donc une généralisation du corollaire 1.50.

Démonstration. Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodique, on dispose de (Y,ν) espace de probabilité avec d'éventuels atomes tel que $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ soit isomorphe à M_T, et on peut donc supposer $\mathrm{MAlg}(Y,\nu) \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$. On va montrer qu'alors $\mathcal{R}_T$ est isomorphe à $\mathcal{R}_0^Y$ (cf. section 2). Pour cela, d'après la remarque 2.18, il suffit de trouver une suite croissante d'échelles $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [[\mathcal{R}_T]]^{\mathbb{N}}$, où chaque φ_i est de hauteur 2^{k_i}, préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, et où les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Si M_k est l'algèbre engendrée par φ_i, la réunion croissante des algèbres engendrées par $M_k \cup \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ est dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$.

(2) $\mu(\{x \in X : T(x)\,\mathcal{R}_{\varphi_i}\,x\}) \to 0$ quand $i \to +\infty$.

Comme pour la preuve du théorème 2.19, on fixe une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ telle que chaque élément apparaisse une infinité de fois. On fixe également une suite (ϵ_i) de réels strictement positifs tendant vers 0. La condition (1) sera vérifiée dès lors que pour tout $i \in \mathbb{N}$ l'algèbre engendrée par φ_i et $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ contient A_i à ϵ_i près. Or le lemme 2.20 nous indique comment prolonger une échelle afin qu'une telle propriété soit satisfaite. Il reste alors à savoir prolonger ce premier prolongement de manière à ce que la condition (2) soit également satisfaite. C'est l'objet du lemme qui suit, dont la preuve nous permettra ainsi de conclure.

Lemme 2.30. *Soit $\varphi \in [[\mathcal{R}_T]]$ une échelle de hauteur 2^k, et $\epsilon > 0$. Alors il existe $l \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une échelle $\psi \in [[\mathcal{R}_T]]$ prolongeant φ de hauteur 2^{k+l} telle que*

$$\mu(\{x \in X : T(x)\,\mathcal{R}_\psi\,x\}) > 1-\epsilon.$$

Montrons donc ce dernier lemme. Soit B la base de φ. Soit $n \in \mathbb{N}$, on applique le lemme de Rohlin à l'application de premier retour T_B pour $N = 2^n$ et $\epsilon = \frac{1}{2^n}$. On a alors $A_n \subseteq B$ tel que $A_n, T_B(A_n), ..., T_B^{2^n-1}(A_n)$ soient disjoints et $\mu(B \setminus \bigsqcup_{j=0}^{2^n-1} T_B^j(A_n)) < \frac{1}{2^n}$. Soit alors $D = B \setminus \bigsqcup_{j=0}^{2^n-1} T_B^j(A_n)$, par le lemme D.1 on peut écrire $D = \bigsqcup_{i=0}^{2^n-1} D_j$ où les D_j sont de même mesure conditionnelle par rapport à M_T.

Soit $j \in \{0, ..., 2^n-2\}$. On fixe $\rho_j \in [[\mathcal{R}_T]]$ tel que $\operatorname{dom}\rho_j = D_j$ et $\operatorname{img}\rho_j = D_{j+1}$. On pose $C_j = T_B^j(A_n) \sqcup D_i$, et on définit enfin $\psi_j \in [[\mathcal{R}_T]]$ de domaine C_j et d'image C_{j+1} par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \rho_j(x) & \text{si } x \in D_j \\ T(x) & \text{si } x \in T_B^j(A_n) \end{cases}$$

Comme dans la preuve du lemme 2.20, on peut alors recoller les $(\psi_j\varphi^{-2^k+1})$ à φ de manière à obtenir un prolongement φ_n de φ, de hauteur 2^{k+n} (cf. figure 4). En outre, celui-ci satisfait

$$\mu(\{x \in B : x \not\mathcal{R}_{\varphi_n} T_B(x)\}) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout $x \in B$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $T_B(x)\,\mathcal{R}_{\varphi_n}\,x$. La restriction de $\mathcal{R}_T$ à B étant $\mathcal{R}_{T_B}$, et $\varphi \in [[\mathcal{R}_T]]$ étant une échelle de base B, on a en fait que pour presque tout $x \in X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $T(x)\,\mathcal{R}_{\varphi_n}\,x$. En particulier, pour N assez grand, on aura $\mu(\{x \in X : T(x)\,\mathcal{R}_{\varphi_N}\,x\}) > 1-\epsilon$, et il suffit alors de poser $\psi = \varphi_N$. $\square$

Chapitre 3

Algèbre dans les groupes pleins

Soit G un groupe plein, une des premières questions qui se posent lors de son étude en tant que groupe abstrait est celle de sa simplicité. Remarquons tout d'abord que si G n'est pas ergodique, une décomposition de X en deux parties G-invariantes non nulles donne une décomposition non triviale de G en produit, ce qui empêche G d'être simple. Un théorème d'A. Fathi (cf. théorème 3.11) affirme que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que tout groupe plein ergodique est simple. Un théorème de H. Dye (voir théorème 3.13) précise quant à lui la situation dans le cas non ergodique, en identifiant les sous-groupes distingués *fermés* de G aux

$$G_A = \{g \in G : g_{\restriction X\setminus A} = \mathrm{id}_{X\setminus A}\},$$

où A est une partie G-invariante de X.

Les preuves que nous donnons de ces deux théorèmes se feront selon le schéma suivant. À partir d'un élément quelconque dans un groupe plein, nous obtenons, à l'intérieur du sous-groupe distingué engendré, une involution dont le support est comparable au support de notre élément initial (proposition 3.7). Ensuite, nous reconstruisons des groupes pleins dans le sous-groupe distingué engendré par une telle involution (lemme 3.9 et corollaire 3.10). Ceci nous permet de retrouver le groupe plein tout entier dans le cas du théorème 3.11, et de retrouver un sous-groupe distingué fermé dans le cas du théorème 3.13.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la question de la continuité automatique pour les groupes pleins généraux, où nous utiliserons encore une fois le fait qu'un groupe plein est engendré par des involutions. Pour un groupe plein G de type II, nous introduisons une distance complète connexe d_G qui correspond à la "convergence uniforme sur les composantes ergodiques", et pour laquelle on montre que le groupe plein a la propriété de continuité automatique, c'est-à-dire que tout morphisme de groupe à valeur dans un groupe topologique séparable est continu pour la distance d_G. Ceci nous permet d'établir une nouvelle caractérisation algébrique des groupes pleins de type II (cf. proposition 3.27).

1. Tout groupe plein est engendré par des involutions

La preuve que nous donnons du théorème suivant est une adaptation de [**Kec10**, lem. 4.5] au cas non ergodique.

THÉORÈME 3.1 (Fathi). *Tout élément T de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ s'écrit comme produit de 8 involutions appartenant au groupe plein $[\mathcal{R}_T]$ qu'il engendre.*

REMARQUE 3.2. Ryzhikov a montré dans [**Ryz93**] que l'on peut en fait écrire tout automorphisme p.m.p. comme produit de 3 involutions appartenant à son groupe plein. Sa preuve utilise le théorème ci-dessus.

DÉMONSTRATION. On commence par découper X selon la taille des orbites de T, autrement dit on écrit $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} X_n$ où $X_n = \{x \in X : |[x]_T| = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Il suffit alors d'écrire chaque $T_{\restriction X_n}$ comme produit de 8 involutions supportées sur X_n, puisqu'on pourra ensuite les recoller et écrire T lui même comme produit de 8 involutions.

Supposons donc dans un premier temps que toutes les orbites de T soient de cardinalité n ; comme on a un domaine fondamental on peut travailler orbite par orbite. La question

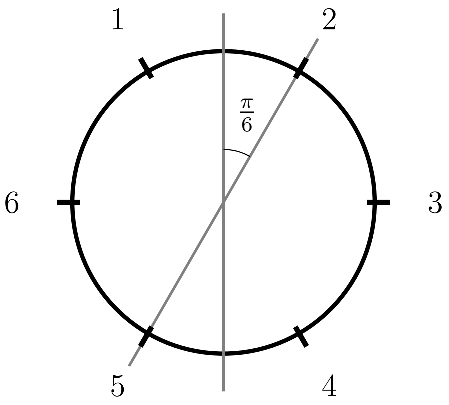

FIGURE 1. La rotation d'angle $\pi/3$ est le produit des deux symétries par rapport aux axes gris. Autrement dit, $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6) = [(1\ \ 2)(6\ \ 3)(5\ \ 4)]\,[(1\ \ 3)(4\ \ 6)]$.

est alors de savoir si l'on peut écrire un n-cycle comme produit d'involutions, question qui est réglée par la figure 1.

On peut donc écrire tout élément dont les orbites sont finies comme produit de deux involutions. Nous allons maintenant établir un lemme qui nous permettra de traiter les orbites infinies. On rappelle que μ_T est la mesure conditionnelle induite par l'algèbre M_T des ensembles T-invariants (cf. annexe D), et que si T est apériodique, alors l'inclusion $M_T \subseteq \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est de type II (théorème 1.45), ce qui nous permet, pour tout $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ et toute fonction M_T-mesurable $f : X \to [0, 1]$ majorée par $\mu_T(A)$, de trouver $B \subseteq A$ tel que $\mu_T(B) = f$ (proposition D.1).

LEMME 3.3. *Soit U un élément du groupe plein de $\mathcal{R}_T$, alors on peut écrire $U = VW$ où V est le produit de deux involutions et W a un support dont la mesure conditionnelle est plus petite que $\frac{1}{2}\mu_T(\operatorname{supp} U)$. De plus, le support des involutions dont V est le produit ainsi que le support de W sont inclus dans le support de U.*

DÉMONSTRATION. Sur la partie $X_{<\infty}$ de X où les orbites de U sont finies, on peut encore appliquer la figure 1 et écrire U comme produit de deux involutions. Et sur la partie X_∞ où les orbites de U sont infinies, on commence par prendre $A \subseteq X_\infty$ dont la mesure conditionnelle est constante égale à $\frac{1}{2}\mu_T(\operatorname{supp} U)$. On pose ensuite $W = U_A$ où U_A est l'application de premier retour en A pour U. Il est clair que les orbites de UW^{-1} sont finies, ce qui permet encore de l'écrire comme produit de deux involutions. ⊣

Revenons à la preuve du théorème. Il nous reste à traiter le cas où toutes les orbites de T sont infinies. On commence par appliquer le lemme précédent pour écrire $T = ST_0$ où S est le produit de deux involutions, et le support de T_0 est de mesure conditionnelle plus petite que $\frac{1}{2}$. Soit donc $X_0 \subseteq X$ contenant le support de T_0 et tel que $\mu_T(X_0) = \frac{1}{2}$, puis soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ tels que

(1) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ soit une partition de X, et
(2) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mu_T(X_i) = \frac{1}{2^{i+1}}$.

Appliquons le lemme précédent à T_0 pour trouver $T_1' \in [\mathcal{R}_T]$ dont le support est de mesure conditionnelle plus petite que $\frac{1}{4}$ ainsi que $S_1 \in [\mathcal{R}_T]$ produit de deux involutions tels que $T_0 = S_1 T_1'$. Soit maintenant $U_1 \in [\mathcal{R}_T]$ une involution supportée par $X_0 \cup X_1$ qui envoie le support de T_1' dans X_1, et soit $T_1 = U_1 T_1' U_1$ qui est alors supporté par X_1. On a $T_0 T_1^{-1} = S_1 T_1' U_1 T_1'^{-1} U_1 = S_1 (T_1' U_1 T_1'^{-1}) U_1$ qui est ainsi le produit de trois involutions supportées par $X_0 \cup X_1$. On applique alors le même raisonnement à T_1 et on trouve $T_2 \in [\mathcal{R}_T]$ dont le support est inclus dans X_2 et tel que $T_1^{-1} T_2$ soit le produit de trois involutions supportées par $X_1 \cup X_2$. Par récurrence, on obtient une suite (T_n) d'éléments de $[\mathcal{R}_T]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n soit supporté par X_n, et $T_n T_{n+1}^{-1}$ soit le produit de trois involutions supportées par $X_n \cup X_{n+1}$. Comme les T_n sont de support disjoints et que la mesure de leur support tend vers 0, on peut écrire

$$T_0 = \prod_{n\in\mathbb{N}} T_n T_{n+1}^{-1} = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} T_{2n} T_{2n+1}^{-1}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} T_{2n+1} T_{2n+2}\right).$$

En recollant les involutions dont chaque $T_{2n}T_{2n+1}^{-1}$ et chaque $T_{2n+1}T_{2n+2}^{-1}$ est le produit, on écrit T_0 comme produit de 6 involutions, et donc $T = ST_0$ comme produit de 8 involutions. □

Corollaire 3.4. *Soit G un groupe plein de type II. Alors tout élément de G peut s'écrire comme produit de 8 commutateurs.*

Démonstration. D'après le théorème 3.1, il suffit de montrer que toutes les involutions de G sont des commutateurs. Soit donc $T \in G$ une involution, soit A un domaine fondamental de $T_{\restriction \operatorname{supp} T}$, et soit B une partie de A dont la mesure conditionnelle est égale à $\mu_G(A)/2$. Soit alors U une involution de G de support A telle que $U(B) = A \setminus B$. On pose

$$V(x) = \begin{cases} U(x) & \text{si } x \in A \\ TUT(x) & \text{si } x \in T(A) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, soit $W \in G$ l'involution définie par

$$W(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in B \cup T(B) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on a $T = WVWV$, donc T est bien un commutateur d'involutions. □

Remarque 3.5. B. Miller a également montré que tout automorphisme p.m.p. est un commutateur dans le groupe plein qu'il engendre (cf. [**Mil04**]). La preuve est cependant beaucoup plus compliquée.

La proposition suivante est une observation très simple qui fournit une caractérisation purement algébrique des groupes pleins de type II. Elle sera raffinée plus tard par la proposition 3.27 et la remarque 3.28.

Proposition 3.6. *Soit G un groupe plein. Alors G est de type II ssi G est parfait, c'est-à-dire que tout élément de G est un produit fini de commutateurs.*

Démonstration. Si G est de type II, le corollaire 3.4 implique que G est parfait. Réciproquement, si G n'est pas de type II, d'après la proposition 1.42 on dispose de $A \in M_G$ non nul en restriction duquel G est de type I_n. Le morphisme de restriction à A est alors une surjection de G sur un groupe plein H de type I_n, et il suffit donc de montrer que H n'est pas parfait.

Or, d'après la proposition 1.49, H est isomorphe à $\mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathfrak{S}_n)$. On peut alors utiliser la signature sur $\mathfrak{S}_n$ qui induit un morphisme non trivial de H dans le groupe abélien $\mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ainsi, H ne peut être parfait et donc G non plus. □

2. Théorèmes de Fathi et de Dye

Soit G un groupe plein de type II, et soit $T \in G$. Dans cette section, on s'attache à trouver une involution dans le sous-groupe distingué engendré par T dont le support sera proche du support de T. Plus précisément, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.7. *Soit G un groupe plein de type II, alors pour tout $T \in G$, il existe une involution U dont le support a une mesure conditionnelle égale à $\frac{1}{2}\mu_G(\operatorname{supp} T)$ et qui soit le produit de T^{-1} par un conjugué de T. En particulier, le sous-groupe distingué engendré par T contient de telles involutions.*

Pour démontrer la proposition qui précède, nous allons faire appel à un résultat général de Halmos concernant les automorphismes p.m.p..

THÉORÈME 3.8 (Halmos [**Hal60**]). *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. Alors il existe $A \subseteq \operatorname{supp} T$ tel que $A \cap T(A) = \emptyset$ et $\mu_T(A) \geqslant \frac{1}{3}\mu_T(\operatorname{supp} T)$, où μ_T est la mesure conditionnelle par rapport à l'algèbre des ensembles T-invariants.*

DÉMONSTRATION. Par recollement, il suffit de montrer que si les orbites de T sont toutes de même cardinalité, alors on dispose de $A \subseteq \operatorname{supp} T$ tel que $\mu_T(A) \geqslant \frac{1}{3}\mu_T(\operatorname{supp} T)$ et $A \cap T(A) = \emptyset$.

Supposons donc dans un premier temps que les orbites de T soient infinies. Alors le lemme de Rohlin (lemme 2.27) pour $N = 2$ et $\epsilon = \frac{1}{3}$ fournit $A \subseteq X$ tel que A et $T(A)$ soient disjoints, et $\mu_T(A \sqcup T(A)) \geqslant 2/3$. Comme T préserve μ_T, on a bien $\mu_T(A) \geqslant \frac{1}{3}$.

Maintenant, si les orbites de T sont toutes finies de cardinalité constante égale à $n \geqslant 2$, on dispose de $B \subseteq X$ tel que $X = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(B)$. Soit alors $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, il suffit de poser $A = \bigsqcup_{i=0}^{k-1} T^{2i}(B)$. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.7. On commence par appliquer le théorème 3.8 pour obtenir $A \subseteq X$ tel que $\mu_T(A) \geqslant \frac{1}{3}\mu_T(\operatorname{supp} T)$ et $A \cap T(A) = \emptyset$. Comme l'espérance conditionnelle préserve les inégalités, on a $\mu_G(A) \geqslant \frac{1}{3}\mu_G(\operatorname{supp} T)$. Et comme G est de type II, on dispose de A_1 et A_2 disjoints inclus dans A, chacun de mesure conditionnelle $\frac{1}{8}\mu_G(\operatorname{supp} T)$.

Soit alors V une involution dans G de support $A_1 \sqcup A_2$ et telle que $V(A_1) = A_2$. Alors TVT^{-1} est une involution dont le support est inclus dans $T(A)$, donc disjoint du support de V. Ainsi, $U = VTVT^{-1}$ est une involution et son support est de mesure conditionnelle $\frac{1}{2}\mu_G(\operatorname{supp} T)$. Et comme V est une involution, on peut réécrire $U = (VTV^{-1})T^{-1}$, autrement dit U est le produit de T^{-1} par un conjugué de T. □

La proposition précédente nous a fourni des involutions dans le sous-groupe distingué engendré par $T \in G$, et il s'agit maintenant d'engendrer des groupes pleins avec de telles involutions, avant de montrer les théorèmes d'A. Fathi et de H. Dye.

LEMME 3.9. *Soit G un groupe plein de type II, et soit $U \in G$ une involution telle que $\mu_G(\operatorname{supp} U) \leqslant \frac{1}{2}$. Alors le sous-groupe distingué engendré par U contient toutes les involutions dont le support est de mesure conditionnelle inférieure ou égale à $2\mu_G(\operatorname{supp} U)$.*

DÉMONSTRATION. La classe de conjugaison dans G d'une involution est déterminée par la mesure conditionnelle de son support. Il suffit donc de montrer que pour toute $f : (X,\mu) \to [0,1]$ mesurable par rapport à M_G telle que $f \leqslant 2\mu_G(\operatorname{supp} U)$, il existe dans le sous-groupe distingué engendré par U une involution dont le support a pour mesure conditionnelle f. Soit donc f une telle application, soit B_1 un domaine fondamental de U et $B_2 = U(B_1)$. On pose également $B = \operatorname{supp} U = B_1 \sqcup B_2$. On a par hypothèse $\mu_G(B_1) = \mu_G(B_2) = \frac{\mu_G(\operatorname{supp} U)}{2} \geqslant \frac{f}{4} f$, et on dispose alors de $A_1 \subseteq B_1$ de mesure conditionnelle $\frac{f}{4}$. On pose $A_2 = U(B_1)$, et $A = A_1 \sqcup A_2$. Alors on trouve $A' \subseteq X \setminus B$ de mesure conditionnelle égale à la mesure conditionnelle de A. Soit $S \in G$ une involution de support $A \cup A'$ telle que $S(A) = A'$.

Alors $U' = SUS$ est une involution qui coïncide avec U sur $B \setminus A$, et dont le support est $A' \cup (B \setminus A)$. Ainsi le support de UU' est égal à $A \sqcup A'$, dont la mesure conditionnelle est égale à f, et UU' est bien dans le sous-groupe distingué engendré par U. □

COROLLAIRE 3.10. *Si U est une involution dont le support est de mesure conditionnelle constante égale à $c \in]0, 1/2]$, le groupe distingué engendré par U est G tout entier.*

DÉMONSTRATION. Si $c = 1/2$, c'est une conséquence immédiate du lemme précédent et du théorème 3.1. Et si $c < 1/2$, quitte à appliquer plusieurs fois le lemme précédent qui permet de multiplier la mesure conditionnelle du support de U par n'importe qu'elle constante $c' \in [0, 2]$, on se ramène à $c = 1/2$. □

THÉORÈME 3.11 (Fathi). *Tout groupe plein ergodique est simple.*

DÉMONSTRATION. Soient G un groupe plein ergodique et $T \in G$, par la proposition 3.7, le groupe distingué engendré par T contient une involution non triviale dont le support est de mesure inférieure ou égale à 1/2. On peut alors appliquer le corollaire 3.10, qui implique que le groupe distingué engendré par T est égal à G tout entier. □

REMARQUE 3.12. Originellement, le théorème d'A. Fathi ne concernait que $\mathrm{Aut}(X, \mu)$. S. Eigen a ensuite remarqué que la même preuve fonctionnait pour les groupes pleins de relations d'équivalence p.m.p. ergodiques [**Eig81**]. Ici, nous voyons que le définition de H. Dye des groupes pleins permet d'englober naturellement ces deux résultats.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la réciproque du théorème 3.11 est vraie : si G n'est pas ergodique, une décomposition de X en deux parties G-invariantes non nulles donne une décomposition de G en produit non trivial, ce qui empêche G d'être simple. Le théorème suivant, dû à H. Dye, précise cette situation.

THÉORÈME 3.13 (Dye). *Soit G un groupe plein de type II. Alors tout sous-groupe distingué fermé N de G s'écrit*

$$N = G_A = \{g \in G : g_{\restriction X \setminus A} = \mathrm{id}\}$$

pour une certaine partie G-invariante A.

DÉMONSTRATION. Soit $T \in N$, et soit $U \in N$ une involution obtenue par la proposition 3.7, i.e. on a $\frac{1}{2}\mu_G(\mathrm{supp}\, T) = \mu_G(\mathrm{supp}\, U)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, soit $A_\epsilon = \{x \in X : \mu_G(\mathrm{supp}\, T)(x) > \epsilon\}$. Pour tout $x \in A_\epsilon$ on a $\frac{1}{2} \geqslant \mu_G(\mathrm{supp}\, U)(x) \geqslant \frac{\epsilon}{2}$, et par le lemme 3.9, il existe $U' \in N$ supportée par A_ϵ telle que $\mu_G(\mathrm{supp}\, U') = \frac{\epsilon}{2}$. On peut alors appliquer le corollaire 3.10 en restriction à A_ϵ et déduire que N contient G_{A_ϵ}. Mais alors, comme N est fermé, N contient G_{A_0} où $A_0 = \{x \in X : \mu_G(\mathrm{supp}\, T) > 0\}$ est le G-saturé du support de T.

Soit alors $\mathcal{F}$ la famille des G-saturés des supports des éléments de N. Soit A le supremum de $\mathcal{F}$ (cf. proposition A.6). Comme $\mathcal{F}$ est stable par réunion finie, on peut réaliser A comme réunion dénombrable croissante d'éléments $A_n \in \mathcal{F}$. Puisque N est fermé et contient tous les G_{A_n} d'après le paragraphe précédent, on a $N = G_A$. □

COROLLAIRE 3.14. *Soit N un sous-groupe distingué fermé de $G = \mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathrm{Aut}(X, \mu))$, où (Y, ν) est un espace de probabilité standard. Alors il existe une partie A de Y telle que*

$$N = G_A = \{f \in \mathrm{L}^0(Y, \nu, \mathrm{Aut}(X, \mu)) : f(y) = \mathrm{id}_X \textit{ pour tout } y \in A\}.$$

Ce corollaire appelle la question suivante.

QUESTION. *Soit H un groupe polonais simple. Quelles conditions sur H font que les sous-groupes normaux fermés de $G = \mathrm{L}^0(Y, \nu, H)$ sont tous de la forme*

$$G_A = \{f \in \mathrm{L}^0(Y, \nu, H) : f(y) = 1_H \textit{ pour tout } y \in A\}?$$

Notons que si $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier, cette propriété est loin d'être satisfaite puisque tout élément non trivial de $G = \mathrm{L}^0(Y, \nu, H)$ engendre un sous groupe fermé distingué d'ordre p, tandis que si (Y,ν) est sans atomes et H est un groupe non trivial, le groupe $G_A = \{f \in G : f(y) = 1_H \text{ pour tout } y \in A\}$ est trivial si $A = Y$, et sinon est isomorphe à G, donc en particulier infini.

3. Continuité automatique

Nous allons maintenant nous intéresser à la question de la propriété de continuité automatique pour les groupes pleins. Un groupe topologique G a la **propriété de continuité automatique** si tout morphisme de groupe à valeur dans un groupe topologique séparable est nécessairement continu. Lorsque G est polonais, ceci implique que G admet une unique topologie de groupe polonaise. À notre connaissance, le seul outil disponible pour montrer la propriété de continuité automatique est la propriété de Steinhaus, introduite par C. Rosendal et S. Solecki [**RS07**].

Définition 3.15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un groupe topologique G a la **propriété de Steinhaus avec exposant** n si pour toute partie A de G telle que $A = A^{-1}$, $1 \in A$, et telle qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n A,$$

alors 1 appartient à l'intérieur de $A^n = \{g_1 g_2 \cdots g_n : \forall i \in \{1, ..., n\}, g_i \in A\}$.

Théorème 3.16 (Rosendal-Solecki, [**RS07**, prop. 2]). *Soit G un groupe topologique ayant la propriété de Steinhaus. Alors G a la propriété de continuité automatique.*

Notre motivation à étudier cette propriété provient d'un article de J. Kittrell et T. Tsankov [**KT10**] où il est établi que le groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p. *ergodique* a la propriété de Steinhaus. En particulier, il satisfait la propriété de continuité automatique, et étant lui même polonais, il admet une unique topologie de groupe polonaise. Dans leur article, le cas non ergodique est éludé par le contre-exemple d'une relation à classes finies, ce qui laisse en suspens la question du cas apériodique, à laquelle nous allons partiellement répondre ici. Notre preuve suit par ailleurs de très près la leur.

Rappelons que le théorème de reconstruction de Dye [**Dye63**, thm. 2] stipule que tout isomorphisme entre des groupes pleins de type II est une conjugaison par une bijection borélienne quasi-préservant la mesure, ce qui implique en particulier qu'un tel isomorphisme est un homéomorphisme. On peut donc le voir comme une forme faible de continuité automatique, ce qui est une bonne raison d'espérer un théorème de continuité automatique au delà des groupes pleins ergodiques.

De plus, si la propriété de continuité automatique venait à être vérifiée par de tels groupes pleins, cela fournirait des exemples de groupes de type $\mathrm{L}^0(Y,\nu,G)$ ayant la propriété de continuité automatique, où (Y,ν) est sans atomes. Malheureusement, le résultat que nous avons obtenu vaut pour une topologie plus fine que celle induite par la distance uniforme.

Définition 3.17. Soit $M \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ une sous-algèbre fermée. La **distance uniforme conditionnelle** d_M par rapport à M est définie sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ par :

$$d_M(S,T) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \mu_M\left(\mathrm{supp}(S^{-1}T)\right)(x),$$

où μ_M est la mesure conditionnelle par rapport à M.

Si G est un groupe plein, on a une distance uniforme conditionnelle privilégiée : celle par rapport à M_G, où M_G est l'algèbre des ensembles G-invariants. Par la suite, lorsque l'on parlera de distance uniforme conditionnelle sur un groupe plein, on fera toujours référence à celle-ci, que l'on notera également d_G. On peut en fait interpréter d_G comme la distance de la convergence uniforme dans les composantes ergodiques de G.

Remarquons que si G agit ergodiquement, alors $d_G = d_u$, et plus généralement que si G n'a qu'un nombre fini de composantes ergodiques, alors d_G induit la topologie uniforme sur G. Par contre, dès que G a une infinité de composante ergodiques, d_G raffine la topologie uniforme.

THÉORÈME 3.18. *Soit G un groupe plein de type II. Alors (G, d_G) a la propriété de Steinhaus avec exposant 98. En particulier, il a la propriété de continuité automatique pour la topologie induite par sa distance uniforme conditionnelle.*

DÉMONSTRATION. On part de $W \subseteq G$ symétrique contenant 1 et d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n W$.

Fixons une partition $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X où la mesure conditionnelle de chaque B_n est constante non nulle. Pour chaque $B \subseteq X$, on note $G_B = \{T \in [\mathcal{R}] : \operatorname{supp} T \subseteq B\}$. La preuve commence exactement comme dans [**KT10**], mais nous incluons cette étape pour le confort du lecteur.

Il s'agit tout d'abord de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que tout élément de G_{B_n} coïncide sur B_n avec un élément de $g_n W$. Raisonnons par l'absurde : si ce n'était pas le cas, on disposerait d'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le support de h_n soit inclus dans B_n, et h_n ne coïncide avec aucun élément de $g_n W$ en restriction à B_n. Alors, soit g obtenu en recollant tous les $h_{n\restriction B_n}$. Comme G est un groupe plein, on a $g \in G$, mais par construction g ne peut obtenir à aucun $g_n W$, ce qui contredit le fait que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n W$. Fixons un tel $n \in \mathbb{N}$, et notons $B = B_n$.

Soit maintenant $T \in G_B$, on a $U \in g_n W$ tel que $U_{\restriction B} = S_{\restriction B}$. De plus, comme $\mathrm{id_X} \in G_B$, on a également $U' \in g_n W$ tel que $U_{\restriction B_n} = \mathrm{id}_{B_n}$. Alors $S = U'^{-1} U \in W g_n^{-1} g_n W = W^2$ car $W = W^{-1}$, mais $U'^{-1} U_{\restriction B} = T_{\restriction B}$ et nous avons donc montré l'assertion suivante :

$$\forall T \in G_B, \exists S \in W^2, S_{\restriction B} = T_{\restriction B}. \tag{3.1}$$

Nous allons maintenant utiliser un argument de dénombrabilité pour trouver une involution dans W^2 dont le support est véritablement inclus dans B. On fixe $A_1, A_2 \subseteq B$ disjoints dont la mesure conditionnelle est constante égale à $\mu(B)/4$, ainsi qu'une involution $T \in G$ supportée par $A_1 \cup A_2$ et telle que $T(A_1) = A_2$. Soit maintenant $(A_t)_{t\in]0,\mu(B)/4[}$ une famille croissante de sous-ensembles de A_1 tels que pour tout $t \in]0, \mu(B)/4[$, l'élément A_t soit de mesure conditionnelle constante égale à t. On définit alors, pour $t \in]0, \mu(B)/4[$, un élément $T_t \in G_B$ par

$$T_t(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in A_t \cup T(A_t) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par dénombrabilité, on trouve $m \in \mathbb{N}$ et $t_1 \neq t_2 \in]0, \mu(B)/4[$ tels que $T_{t_1} \in g_m W$ et $T_{t_2} \in g_m W$. Soit alors $S = T_{t_1} T_{t_2}^{-1} \in W^2$, alors le support de T est égal à $(A_{t_1} \bigtriangleup A_{t_2}) \sqcup T(A_{t_1} \bigtriangleup A_{t_2})$, et est donc non nul de mesure conditionnelle constante plus petite que $\mu(B)/2$. On a donc trouvé $S \in G$ tel que

$$S \in W^2,\ \mu_G(\operatorname{supp} S) = c \in]0, \mu(B)/2[\text{ et } \operatorname{supp} S \subseteq B. \tag{3.2}$$

Soit maintenant $C \subseteq B$ tel que $\operatorname{supp} S \subseteq C$ et $\mu_G(C) = 2\mu_G(\operatorname{supp} S)$. Il nous reste à montrer l'assertion suivante avant de pouvoir conclure la preuve.

$$\text{Nous avons } G_C \subseteq W^{96}. \tag{3.3}$$

Pour ceci, comme d'après le théorème 3.1 tout élément de G_C est le produit d'au plus 8 involutions, il suffit de montrer que toute involution dans G_C est le produit d'au plus 12 éléments de W. Dans ce but, nous allons adapter la preuve du lemme 3.9.

Soit donc $T \in G_C$ une involution. On construit tout d'abord une involution $U \in G_C$ telle que le support de $S(USU)$ ait la même mesure conditionnelle que celui de T. Soit $E \subseteq (C \setminus \operatorname{supp} S)$ de mesure conditionnelle $\mu_G(\operatorname{supp} T)/2$. Soit F_1 un sous-ensemble d'un domaine fondamental de $S_{\restriction \operatorname{supp} S}$ de mesure conditionnelle $\frac{\mu(C)-\mu(\operatorname{supp} T)}{4}$, et soit $F_2 = T(F_1)$. Soiet enfin $F = F_1 \sqcup F_2$ et $\varphi \in [[G]]$ un isomorphisme partiel de domaine E et d'image F. On définit alors une involution $U \in G_C$ par

$$U(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in E \\ \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \in F \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors le support de $S(USU)$ est $E \cup F$, de mesure conditionnelle égale à celle de $\operatorname{supp} T$. On trouve alors $\tilde{U} \in W^2$ qui coïncide avec U sur B par (3.1). Alors $\tilde{U}S\tilde{U}^{-1} = USU$ de sorte que $S(USU)$ appartient à W^8. Comme son support a la même mesure conditionnelle que le support de T, on dispose de $V \in G$ qui conjugue T et $SUSU$. Soit alors $\tilde{V} \in W^2$ coïncidant avec V sur B, toujours par (3.1). Alors $T = VSUSUV = \tilde{V}S\tilde{U}S\tilde{U}^{-1}\tilde{V}^{-1}$ appartient à W^{12}, ce qui établit (3.3).

Nous pouvons alors conclure la preuve exactement comme dans [**KT10**] : pour montrer que W^{98} est un voisinage de l'identité, on va montrer que toute suite convergeant vers id_X a au moins un terme appartenant à W^{98}. Soit donc (T_n) une suite d'éléments de G telle que $d_G(T_n, 1) \to 0$. Soit $D_n = \operatorname{supp} T_n$, et $D = \bigcup_m g_m D_m$.

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $\sum \mu_G(D_n) \leqslant \mu_G(C)$, et donc $\mu_G(D) \leqslant \mu_G(C)$. Maintenant, on dispose de $A \subseteq C$ tel que $\mu_G(A) = \mu_G(D)$. Soit alors $S \in G$ tel que $S(A) = D$; il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $S \in g_m W$, et on pose $T = g_m^{-1} S \in W$. On a $D_m \subseteq T(A)$, et donc $T^{-1} T_m T \in G_A \subseteq G_C \subseteq W^{96}$. Ainsi T_m appartient à $WW^{96}W = W^{98}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 3.19. En utilisant un théorème de V. Rhyzikov [**Ryz93**] qui permet d'exprimer tout $T \in \operatorname{Aut}(X, \mu)$ comme produit de trois involutions appartenant au groupe plein qu'il engendre, on peut montrer qu'en fait G est 38-Steinhaus.

La question suivante se pose naturellement, et nous pensons que le théorème 3.18 est un pas vers une réponse affirmative.

Question. *Soit G un groupe plein de type II. Est-ce-que (G, d_u) satisfait la propriété de continuité automatique ?*

Si G est un groupe polonais ayant la propriété de continuité automatique, alors il a une unique topologie polonaise. On peut donc affaiblir la question précédente, et se demander quand est-ce-que la distance uniforme induit sur un groupe plein G une unique topologie polonaise[1]. Tout d'abord, un tel groupe plein doit être séparable, autrement dit provenir d'une relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ (corollaire 1.26). Si $\mathcal{R}$ a un nombre fini de composantes ergodiques, on a vu que $[\mathcal{R}]$ avait la propriété de continuité automatique, et donc une unique topologie polonaise.

Théorème 3.20. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. avec une décomposition ergodique discrète. Alors $[\mathcal{R}]$ admet une unique topologie polonaise.*

1. Il serait également intéressant de caractériser les groupes pleins ergodiques admettant une topologie polonaise. Le théorème 3.18 montre qu'une telle topologie doit être raffinée par la topologie uniforme, et une adaptation immédiate des arguments de R. Kallman [**Kal85**] montre qu'elle raffine la topologie faible. Dans un travail en cours avec A. Carderi, nous exhibons des exemples de groupes pleins ergodiques avec une topologie polonaise strictement comprise entre la topologie uniforme et la topologie faible.

La démonstration utilise le lemme suivant, intéressant en lui-même. On utilisera implicitement le fait que tout ensemble analytique [2] est Baire-mesurable [**Kec95**, thm. 21.6], et que si τ et τ' sont deux topologies de groupes polonaises sur G, alors $\tau = \tau'$ ssi tout τ-voisinage ouvert de 1 est τ'-Baire-mesurable (cf. [**Ros09**]).

Lemme 3.21. *Soit $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de groupes polonais telle que chacun possède une unique topologie polonaise et soit de centre trivial. Alors $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ a une unique topologie polonaise.*

Démonstration. On fixe une topologie polonaise sur $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $G'_n = \{g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i : \forall k \neq n, \pi_k(g) = e\}$. Remarquons que G'_n est le commutateur de $H_n = \{g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i :: \pi_n(g) = e\}$, et donc fermé. Comme G_n a une unique topologie polonaise, et s'identifie à G'_n, la topologie induite sur G'_n est celle de G_n. En particulier, pour tout ouvert U de G_n, $\tilde{U} = \{e\} \times \cdots \times \{e\} \times U \times \{e\} \times \cdots$ est G_δ dans $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Ensuite, comme H_n est également le commutateur de G_n, H_n est fermé. On voit alors que pour tout ouvert U de G_n, l'ensemble $\tilde{U}\cdot H_n = G_1 \times \cdots \times G_{n-1} \times U \times G_{n+1} \times \cdots$ est analytique, d'où l'unicité de topologie polonaise sur $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$. □

Preuve du théorème 3.20. Par hypothèse, $\mathcal{R}$ a une infinité dénombrable de composantes ergodiques, et on peut écrire $X = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ où $\mathcal{R}_{\restriction X_i}$ est ergodique. On a alors $[\mathcal{R}] = \prod_{i\in\mathbb{N}} [\mathcal{R}_{\restriction X_i}]$, et le théorème est donc une conséquence directe du lemme 3.21. □

On peut également se demander s'il existe des groupes pleins de type I ayant la propriété de continuité automatique. Montrons qu'il n'en est rien. Pour cela, nous allons utiliser le théorème qui suit.

Théorème 3.22. *Soit (X, μ) un espace de probabilité standard non fini, et G un groupe compact métrisable. Alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, G)$ muni de la topologie de la convergence en mesure n'a pas la propriété de continuité automatique ; plus précisément il existe des morphismes discontinus surjectifs $\mathrm{L}^0(X, \mu, G) \to G$.*

Lemme 3.23. *Soit κX l'espace de Stone de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ et G un groupe compact. Alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, G)$ est isomorphe au groupe des fonctions continues de κX dans G.*

Démonstration. G est homéomorphe à un compact $\tilde{G}$ de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. On a une bijection naturelle entre les $f \in \mathrm{L}^0(X, \mu, [0, 1])$ et les fonction continues $\tilde{f} : \kappa X \to [0, 1]$. Soit maintenant $f \in \mathrm{L}^0(X, \mu, G)$, on peut la voir comme une application de X dans G, donc la voir comme une suite de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in X$, $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{G}$, de telles suites étant identifiées à mesure nulle près. C'est donc la même chose qu'une suite d'applications continues $(\tilde{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que pour presque tout $y \in \kappa X$, $(\tilde{f}_i(y))_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{G}$. Mais comme G est fermé, et $\prod_{i\in\mathbb{N}} f_i$ est continue, on a bien pour tout $y \in \kappa X$, $(f_i(y))_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{G}$. □

Remarque 3.24. Dans le cas où (X, μ) est complètement atomique avec une infinité d'atomes, le lemme précédent implique que $G^{\mathbb{N}}$ est isomorphe à au groupe des applications continues de $\beta\mathbb{N}$ dans G, où $\beta\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, ce qui est une conséquence immédiate de la propriété universelle de $\beta\mathbb{N}$. Notre démonstration est d'ailleurs fortement inspirée de celle du fait que $\beta\mathbb{N}$, vu comme spectre de $l^\infty(\mathbb{N})$, satisfait une propriété universelle.

2. Si X est un espace polonais, $A \subseteq X$ est dit **analytique** si c'est l'image via une application borélienne d'un borélien inclus dans un espace polonais.

Preuve du théorème 3.22. Par le lemme précédent, $\mathrm{L}^0(X,\mu,G)$ est isomorphe à l'espace des applications continues de κX dans G. Considérons, pour chaque $x \in \kappa X$, la projection $\pi_x : f \in \mathcal{C}^0(\kappa X, G) \mapsto f(x)$. Toutes ces projections sont différentes, mais il y en a $2^{2^{\aleph_0}}$ et donc elles ne peuvent être toutes continues. □

Corollaire 3.25. *Soit G un groupe plein qui ne soit pas de type II. Alors G admet un morphisme non trivial dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; en particulier (G,d_u) ne vérifie pas la propriété de continuité automatique.*

Démonstration. Si G n'est pas de type II, soit A un ensemble invariant en restriction auquel G est de type I_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors un morphisme de restriction surjectif $G \to G_{\restriction A}$, et il suffit donc de trouver un morphisme non trivial de $G_{\restriction A}$ dans un groupe zéro-dimensionnel. D'après la proposition 1.49, le groupe $G_{\restriction A}$ s'identifie à $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathfrak{S}_n)$, où (Y,ν) est un espace de probabilité standard. Ce dernier admet par le théorème 3.22 un morphisme discontinu surjectif sur $\mathfrak{S}_n$, en le composant avec la signature on obtient un morphisme non trivial dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Enfin, (G,d_u) est connexe par continuité de $A \mapsto T_A$, où T_A est l'application de premier retour en $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ [3]. Ainsi, tout morphisme continu de G dans un groupe zéro-dimensionnel est trivial. Ainsi, (G,d_u) ne vérifie pas la propriété de continuité automatique. □

Finissons ce chapitre par une application du théorème 3.18, dont le cas ergodique est dû à Danilenko [**Dan95**].

Lemme 3.26. *Soit G un groupe plein de type II. Alors (G,d_G) est connexe par arcs.*

Démonstration. Comme G est engendré par les involutions, il suffit de trouver un chemin entre une involution quelconque et id_X. Soit donc T une involution, soit A un domaine fondamental de $T_{\restriction \operatorname{supp} T}$, soit $(A_t)_{t\in[0,1]}$ une famille croissante de sous-ensembles de A, avec $\mu_G(A_t) = t\mu_G(A)$. Soit maintenant $T_t \in G$ définie par

$$T_t(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in A_t \sqcup T(A_t) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $t \mapsto T_t$ est un chemin continu entre id_X et T. □

Théorème 3.27. *Soit G un groupe plein. Alors G est de type II ssi G n'admet aucun morphisme non trivial à valeur dans un groupe polonais zéro-dimensionnel (i.e. dont la topologie admet une base d'ouverts-fermés).*

Démonstration. Si G est de type II, alors la continuité automatique et la connexité de G font que tout morphisme à valeur dans un groupe polonais zéro-dimensionnel est trivial. Si G n'est pas de type II, par le corollaire 3.25 il admet un morphisme non trivial à valeur dans le groupe zéro-dimensionel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Remarque 3.28. Comme les groupes pleins de type II sont parfaits (théorème 3.6) et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est abélien, on peut aussi caractériser les groupes pleins de type II comme ceux n'ayant pas de morphisme non trivial à valeur dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui a l'avantage de ne pas faire appel à la propriété de continuité automatique.

3. Pour $A = X$, $T_A = T$ tandis que pour $A = \emptyset$, $T_A = \mathrm{id}_X$, et il existe un chemin continu dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ entre $\emptyset$ et X, donné par exemple par $A_t = [0,t]$ dans le cas où $X = [0,1]$.

Chapitre 4

Coût et rang topologique

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat principal de cette thèse, qui répond à la question du rang topologique des groupes pleins. Rappelons que si G est un groupe topologique, son **rang topologique** est le nombre minimal d'éléments de G engendrant un sous-groupe dense dans G. Dans le cas ergodique, nous donnons une formule reliant le coût d'une relation d'équivalence p.m.p. au rang topologique du groupe plein (théorème 4.11). Dans le cas d'une relation p.m.p. non ergodique, le coût conditionnel est une fonction qui associe à une composante ergodique le coût usuel de la relation dans cette composante ergodique. Une telle fonction détermine entièrement le rang topologique du groupe plein d'une relation non ergodique (théorème 4.15).

Dans ce chapitre, on suppose une certaine familiarité du lecteur avec les notions de graphage et de coût (cf. [**Gab00**]). Rappelons brièvement qu'étant donnée une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$, un **graphage** de $\mathcal{R}$ est une famille dénombrable d'isomorphismes partiels de $\mathcal{R}$, on dit qu'un graphage **engendre** $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ est la plus petite relation d'équivalence p.m.p. dont c'est un graphage. Le coût d'un graphage est la somme des mesures des domaines des isomorphismes partiels le constituant, et le **coût** de $\mathcal{R}$ est alors l'infimum des coût des graphages l'engendrant.

1. Engendrer topologiquement un groupe plein

Si G est un groupe topologique, on dit qu'une partie F de G l'**engendre topologiquement** si le groupe engendré par F est dense dans G. La section qui suit est dévolue à un théorème de J. Kittrell et T. Tsankov qui stipule qu'un groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ est topologiquement engendré par la réunion des groupes pleins de toute famille de relations d'équivalence engendrant $\mathcal{R}$ (théorème 4.4). Notre preuve est très proche de la leur, le formalisme des algèbres de mesure apportant quelques raccourcis. Le résultat est énoncé purement en termes de groupe plein (théorème 4.3). Nous aurons besoin d'un lemme général qui appelle la définition suivante.

Définition 4.1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, et soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. On dit que $B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul induit une **bonne décomposition** de T par rapport à $\mathcal{F}$ si il existe $k \in \mathbb{N}$ et $T_1, ..., T_k \in \mathcal{F}$ tels que, si pour $i \in \{1, ..., k\}$, on pose $B_i = T_i \cdots T_1(B)$, ainsi que $B_0 = B$, alors les B_i sont tous disjoints, et $T_{\restriction B} = (T_k \cdots T_1)_{\restriction B}$, avec la convention que pour $k = 0$ on a $T_{\restriction B} = \mathrm{id}_B$.

Lemme 4.2. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Soit $A \subseteq X$ non nul et $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $T_1, ..., T_n \in \mathcal{F}$ vérifiant $T_{\restriction A} = (T_n \cdots T_1)_{\restriction A}$. Alors il existe $B \subseteq A$ qui induise une bonne décomposition pour T par rapport à $\mathcal{F}$.*

Preuve du lemme. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation pour $n = 0$ est tautologique. Maintenant, supposons le résultat établi pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit donc $A \subseteq \mathrm{supp}\, T$ non nul et $T_1, ..., T_{n+1} \in \mathcal{F}$ tels que $T_{\restriction A} = (T_{n+1} \cdots T_1)_{\restriction A}$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à $T_n \cdots T_1$ pour trouver $A' \subseteq A$ et $S_1, ..., S_k \in \mathcal{F}$ tels que $A', S_1(A'), ..., S_k \cdots S_1(A')$ soient tous disjoints et $(T_n \cdots T_1)_{\restriction A'} = (S_k \cdots S_1)_{\restriction A'}$.

S'il existe $B \subseteq A$ non nul et $i \in \{0, ..., k\}$ tels que $(T_{n+1} S_k \cdots S_{k-i+1})_{\restriction B} = \mathrm{id_B}$, alors $T_{\restriction B} = (S_{k-i} \cdots S_1)_{\restriction B}$ et donc B induit une bonne décomposition pour T par rapport à $\mathcal{F}$.

Si au contraire pour tout $i \in \{0, ..., k\}$ et tout $B \subseteq A$ on a $(T_{n+1}S_k \cdots S_{k-i+1})_{\restriction B} \neq \mathrm{id_B}$, posons $A_{-1} = A$. Construisons par récurrence sur $i \in \{0, ..., k\}$ une suite décroissante de sous-ensembles non nuls A_i de A tels que pour tout $i \in \{0, ..., k\}$, l'ensemble $T_{n+1}S_k \cdots S_1(A_i)$ soit disjoint de $S_i \cdots S_1(A_i)$. Pour ce faire, on remarque que $T_{n+1}S_k \cdots S_{i \restriction S_{i-1} \cdots S_1(A_{i-1})} \neq \mathrm{id}_{S_{i-1} \cdots S_1(A_{i-1})}$, donc on dispose de $B_i \subseteq S_{i-1} \cdots S_1(A_{i-1})$ tel que $T_{n+1}S_k \cdots S_i(B_i)$ soit disjoint de B_i, et il suffit alors de poser $A_i = (S_{i-1} \cdots S_1)^{-1}(B_i)$. On pose enfin $B = A_k$, alors $T_{\restriction B} = (T_{n+1}S_k \cdots S_1)_{\restriction B}$, et les ensembles B, $S_1(B)$, ..., $S_k \cdots S_1(B)$, $T_{n+1}S_k \cdots S_1(B)$ sont disjoints, d'où le fait que B induise une bonne décomposition de T par rapport à $\mathcal{F}$, ce qui achève la récurrence. $\square$

THÉORÈME 4.3. *Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes pleins. Alors, si G est le groupe plein engendré par $\bigcup_{i \in I} G_i$, on a en fait*

$$G = \overline{\left\langle \bigcup_{i \in I} G_i \right\rangle},$$

autrement dit G est engendré topologiquement par la réunion des G_i.

DÉMONSTRATION. Par le théorème 3.1, il suffit de montrer que toute involution de G est une limite de produit d'éléments de $\bigcup_{i \in I} G_i$. Soit donc T une telle involution. Soit $\mathcal{C}$ la classe des sous-ensembles C de $\operatorname{supp} T$ tels qu'il existe $D \subseteq C$ avec $C = D \sqcup T(D)$, et D soit partitionné par une famille dénombrable d'ensembles, chacun induisant une bonne décomposition pour T par rapport à $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} G_i$. La classe $\mathcal{C}$ est une famille de sous-ensembles de $\operatorname{supp} T$ stable par réunion dénombrable. D'après le lemme A.7, elle admet un maximum $C \in \mathcal{C}$. Par définition, on a alors une partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{\restriction A_n}$ soit un produit fini d'éléments de $\bigcup_{i \in I} G_i$. En utilisant la maximalité de C et le lemme 4.2, on obtient que $C = \operatorname{supp} T$.

Comme $C = \operatorname{supp} T$ et T est une involution, on a $D \subseteq C$ tel que $C = D \sqcup g(D)$, et D soit partitionné par une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles induisant une bonne décomposition pour T par rapport à $\bigcup_{i \in I} G_i$.

Soit alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$,

$$\tilde{T}_n(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in B_n \sqcup T(B_n) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors chaque $\tilde{T}_n$ est une involution, et T s'écrit comme produit commutatif $T = \prod_{n \in \mathbb{N}} \tilde{T}_n = \lim_{n \to \infty} \prod_{m=0}^{n} \tilde{T}_n$. Ainsi T appartient à l'adhérence du groupe engendré par les $\tilde{T}_n$. On s'est donc ramené à montrer que chaque $\tilde{T}_n$ appartient au groupe engendré par $\bigcup_{i \in I} G_i$. Autrement dit, on s'est ramené à montrer que, si $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est une involution telle qu'il existe un sous-ensemble D de $\operatorname{supp} T$ vérifiant $\operatorname{supp} T = D \sqcup T(D)$ et induisant une bonne décomposition pour T par rapport à $\bigcup_{i \in I} G_i$, alors T appartient à l'adhérence du groupe engendré par $\bigcup_{i \in I} G_i$.

Soit donc $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ un tel élément, et D un sous-ensemble de $\operatorname{supp} T$ vérifiant $\operatorname{supp} T = D \sqcup T(D)$ et induisant une bonne décomposition pour T par rapport à $\bigcup_{i \in I} G_i$. On dispose de $T_1, ..., T_k \in \bigcup_{i \in I} G_i$ tels que, si on pose $D_0 = D$, et pour $j = 1, ..., k$ on note $D_j = T_j \cdots T_1 D_0$, alors $(D_j)_{j=0}^k$ est une famille d'ensembles disjoints. Définissons, pour $j = 1, ..., k-1$, un automorphisme U_j de (X, μ) par :

$$U_j(x) = \begin{cases} T_j(x) & \text{si } x \in D_{j-1}, \\ T_j^{-1}(x) & \text{si } x \in D_j, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors U_j est une involution qui appartient à $\bigcup_{i\in I} G_i$ puisque chaque G_i est un groupe plein. Montrons que T est un produit des U_j. Pour cela, considérons la relation d'équivalence engendrée sur $\bigcup_{j=0}^{k} D_j$ par le graphage $\{T_{j\restriction D_{j-1}} : j \in \{1, ..., k\}\}$. C'est une relation d'équivalence de type I_{k+1} qui est donc orbitalement équivalente à la relation d'équivalence p.m.p. "avoir la même première coordonnée" sur $\{1, ..., k+1\} \times (Y, \nu)$, où (Y, ν) est un espace de probabilité standard sans atomes, via une bijection p.m.p. φ entre D_0 et $\{1\} \times Y$ que l'on étend en une équivalence orbitale en envoyant D_i sur $\{i+1\} \times Y$ via φT_j^{-1}. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{k+1}$ fait partie du groupe plein de cette nouvelle relation d'équivalence en agissant sur la première coordonnée.

Les involutions U_j sont alors conjuguées aux transpositions $(j \quad j+1)$, et T est conjuguée à la transposition $(1 \quad k+1)$. Comme les transpositions $(j \quad j+1)$ engendrent $\mathfrak{S}_{k+1}$, T appartient au groupe engendré par les U_j. □

La traduction du théorème 4.3 dans le cas des groupes pleins de relations d'équivalence p.m.p. est la suivante, et c'est ainsi que le résultat est formulé dans [**KT10**].

THÉORÈME 4.4 ([**KT10**, thm. 4.7]). *Soit $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de relations d'équivalence p.m.p., et soit $\mathcal{R} = \bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_i$ la relation d'équivalence p.m.p. engendrée*[1] *par les $\mathcal{R}_i$. Alors on a*

$$[\mathcal{R}] = \overline{\left\langle \bigcup_{i\in I} [\mathcal{R}_i] \right\rangle}.$$

2. Coût conditionnel

DÉFINITION 4.5. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. sur (X, μ) espace de probabilité standard, soit $M \subseteq M_{\mathcal{R}}$ une sous-algèbre fermée, où $M_{\mathcal{R}}$ désigne l'algèbre des ensembles $[\mathcal{R}]$-invariants[2]. Enfin, soit Φ un graphage de $\mathcal{R}$. Le **coût conditionnel** de $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ par rapport à M, appelé aussi M-coût de Φ est la fonction

$$\text{Coût}_M(\Phi) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_M(\Phi),$$

où μ_M est la mesure conditionnelle[3] associée à la sous-algèbre M. Le **coût conditionnel** d'une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ par rapport à M, appelé aussi M-coût de $\mathcal{R}$, est l'infimum des M-coûts des graphages qui engendrent $\mathcal{R}$.

REMARQUE 4.6. Dans le cas où $M = \{\emptyset, X\}$, la mesure conditionnelle par rapport à M est la mesure μ, et le M-coût est donc le coût usuel tel que défini par G. Levitt [**Lev95**].

La définition précédente fait appel à la notion d'infimum pour des fonctions M-mesurables (les coûts des graphages) où $M \subseteq M_{\mathcal{R}}$. Il faut donc vérifier qu'un tel infimum existe. Par la proposition C.7, il suffit de voir que les fonctions $\mu_M(\Phi)$ constituent un ensemble dirigé, i.e. que si Φ_1 et Φ_2 sont deux graphages engendrant $\mathcal{R}$, leurs coûts conditionnels sont minorés par le coût d'un troisième graphage engendrant $\mathcal{R}$. Posons donc $A = \{x \in X : \text{Coût}_M(\Phi_1)(x) < \text{Coût}_M(\Phi_2)(x)\}$, c'est un ensemble $\mathcal{R}$-invariant, et ainsi $\Phi_3 = \Phi_{1\restriction A} \cup \Phi_{2\restriction X\setminus A}$ est bien un graphage qui engendre $\mathcal{R}$, et dont le coût est par construction plus petit que le coût de Φ_1 et le coût de Φ_2.

Mais nous avons en fait mieux, puisque la famille $\mathcal{F}$ des coûts de graphages engendrant $\mathcal{R}$ satisfait les hypothèses de la proposition C.9, ce qui entraine la proposition suivante.

1. C'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est la plus petite relation d'équivalence p.m.p. contenant chacune des $\mathcal{R}_i$.
2. On peut bien sûr également voir $M_{\mathcal{R}}$ comme l'algèbre des ensembles $\mathcal{R}$-saturés.
3. Pour la définition de la mesure conditionnelle, se référer à l'annexe D.

PROPOSITION 4.7. *Soit f une fonction M-mesurable strictement positive, alors on dispose d'un graphage Φ de $\mathcal{R}$ tel que* $\text{Coût}_M(\Phi) < \text{Coût}_M(\mathcal{R}) + f$.

Nous allons maintenant donner une version non ergodique du lemme III.5 dans [**Gab00**].

LEMME 4.8. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique, et soit $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$ une relation hyperfinie avec la même algèbre d'ensembles invariants que $\mathcal{R}$ (cf. proposition 2.19). Soit Ψ_0 un graphage de $\mathcal{R}_0$ de coût conditionnel 1, et soit f une fonction M-mesurable strictement positive. Alors il existe un graphage Φ dont le coût conditionnel est plus petit que* $\text{Coût}_M(\mathcal{R}) - 1 + f$ *et tel que $\Phi_0 \cup \Phi$ engendre $\mathcal{R}$.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.7, on dispose d'un graphage Φ qui engendre $\mathcal{R}$ et dont le coût est plus petit que $f/2 + \text{Coût}_M(\mathcal{R})$. Soit $A \subseteq X$ dont la mesure conditionnelle est plus petite que $f/2$. La procédure d'induction décrite dans [**Gab00**, lemme II.8] fournit un arborage Φ_0 de $\mathcal{R}_0$ dont le coût est égal à $(1 - \mu_M(A))$ et un graphage $\tilde{\Phi}$ de $\mathcal{R}$ dont le M-coût est égal à $\text{Coût}(\Phi) - (1 - \mu_M(A))$ tels que $\Phi_0 \cup \tilde{\Phi}$ engendre $\mathcal{R}$. Alors en particulier $\Psi_0 \cup \tilde{\Phi}$ engendre $\mathcal{R}$. □

Étant donné une relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$, nous disposons d'une algèbre $\mathcal{R}$-invariante privilégiée : l'algèbre $M_{\mathcal{R}}$ formée de tous les ensembles $\mathcal{R}$-invariants. La relation entre le coût conditionnel par rapport à $M_{\mathcal{R}}$ et la fonction qui à une composante ergodique associe son coût est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 4.9. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. sur (X, μ), soit $x \mapsto \mu_x$ sa décomposition ergodique. Alors le coût conditionnel de $\mathcal{R}$ est la fonction qui associe à $x \in X$ le coût de $\mathcal{R}$ vue comme relation d'équivalence p.m.p. sur (X, μ_x).*

DÉMONSTRATION. C'est une reformulation de la preuve de la proposition 18.4. dans [**KM04**]. □

Nous pouvons maintenant formuler le théorème principal de ce chapitre.

THÉORÈME 4.10. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique. Alors le rang topologique $t([\mathcal{R}])$ du groupe plein de $\mathcal{R}$ et le coût conditionnel de $\mathcal{R}$ sont reliés par la formule*

$$t([\mathcal{R}]) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \lfloor \text{Coût}_{M_{\mathcal{R}}}(\mathcal{R})(x) \rfloor + 1.$$

La preuve du théorème précédent est donnée dans la section 5. Comme une relation d'équivalence p.m.p. est ergodique ssi $M_{\mathcal{R}} = \{\emptyset, X\}$, et que dans ce cas là le coût conditionnel n'est d'autre que le coût usuel, on peut reformuler ce théorème de la manière suivante dans le cas ergodique.

THÉORÈME 4.11. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. ergodique. Alors le rang topologique $t([\mathcal{R}])$ du groupe plein de $\mathcal{R}$ et le coût de $\mathcal{R}$ sont reliés par la formule*

$$t([\mathcal{R}]) = \lfloor \text{Coût}(\mathcal{R}) \rfloor + 1.$$

3. Autour du groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$

Commençons par revenir sur la notion d'échelle de rang k (définition 2.9). Celles-ci sont en effet des exemples particuliers de pré-k-cycles, notion qui aura son importance pour relier coût et rang topologique.

DÉFINITION 4.12. Soit $k \in \mathbb{N}$, un **pré-k-cycle** est un isomorphisme partiel φ de (X, μ) qui, en restriction à $\operatorname{dom} \varphi \cup \operatorname{img} \varphi$, est une échelle [4] de hauteur k.

4. Se référer à la définition 2.9 et surtout à la figure 2 qui la suit.

Un k-**cycle** est un automorphisme de (X, μ) dont toutes les orbites sont de cardinal 1 ou k. On peut prolonger tout pré-k-cycle φ en un k-cycle C_φ en posant :

$$C_\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \operatorname{dom} \varphi, \\ \varphi^{-k-1}(x) & \text{si } x \in \operatorname{img} \varphi \setminus \operatorname{dom} \varphi, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que C_φ et φ engendrent la même relation d'équivalence, dont les classes sont de cardinal 1 ou k. De plus, φ est un arborage de cette relation d'équivalence.

Revenons maintenant à l'odomètre T_0. On rappelle qu'on peut le voir comme limite d'échelles φ_k de hauteur 2^k, qui sont les restrictions à $\{(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (x_1, ..., x_k) \neq (1, ..., 1)\}$ de T_0. Ces échelles étant des pré-p-cycles, on peut considérer les p-cycles correspondants $T_k = C_{\varphi_k}$.

On vérifie alors que chaque T_k est en fait une permutation dyadique. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'automorphisme $T_k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$ correspond [5] à "l'odomètre fini" $\tau_k \in \mathfrak{S}_{2^k}$ défini par $\tau_k((x_i)_{i=1}^k) = (y_i)_{i=1}^k$ où :

— si $x_i = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, alors $y_i = 0$ pour tout i, et

— sinon, soit i_0 le premier entier i tel que $x_i = 0$, on pose $y_i = 1$ pour tout $i \leqslant i_0$, et $y_i = x_i$ pour tout $i > i_0$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la question du rang topologique pour le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, où (Y, ν) est un espace de probabilité standard fixé, avec d'éventuels atomes. Rappelons que $\mathcal{R}_0^Y$ est une relation p.m.p. sur $(X, \mu) = (Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ définie par $(y, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}) \, \mathcal{R}_0^Y \, (y', (z'_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ssi $y = y'$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $z_n = z'_n$ pour tout $n \geqslant p$.

Étant donné $B \in \operatorname{MAlg}(Y, \nu)$ et $U \in [\mathcal{R}_0]$, on définit $\iota_B(U) \in [\mathcal{R}_0^Y]$ par : pour tous $(y, z) \in Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\iota_B(U)(y, z) = \begin{cases} (y, U(z)) & \text{si } y \in B, \\ (y, z) & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Autrement $\iota_B(U)$ est défini fibre à fibre, en lui imposant d'agir comme U dans les fibres au dessus de B, et d'agir trivialement dans les fibres au dessus de $Y \setminus B$.

Rappelons que le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ s'identifie isométriquement au groupe $\mathrm{L}^0(Y, \nu, [\mathcal{R}_0])$ des applications mesurables à valeur dans le groupe plein de la relation hyperfinie ergodique $\mathcal{R}_0$ (proposition 2.14). Via cette identification, notre automorphisme $\iota_B(U)$ devient l'application $Y \to [\mathcal{R}_0^Y]$ définie par

$$\iota_B(U)(y) = \begin{cases} U & \text{si } y \in B, \\ \mathrm{id}_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $\iota_B : [\mathcal{R}_0] \to [\mathcal{R}_0^Y]$ est un morphisme de groupes bilipschitzien.

PROPOSITION 4.13. *Le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est topologiquement engendré par la réunion pour $B \in \operatorname{MAlg}(Y, \nu)$ et $k \in \mathbb{N}$ des $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$.*

DÉMONSTRATION. La proposition 2.16 nous assure que le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est engendré topologiquement par la réunion croissante en $k \in \mathbb{N}$ des ensembles des applications à valeur dans $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$. Il suffit ainsi de voir que les éléments de cette réunion appartiennent au groupe engendré par la réunion pour $B \in \operatorname{MAlg}(Y, \nu)$ et $k \in \mathbb{N}$ des $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$.

Soit donc U une application à valeur dans le groupe fini $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$, vue comme un élément du groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. Pour $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^n}$, on note $A_\sigma = \{y \in Y : U(y) = \sigma\}$. La famille

5. Rappelons qu'on a une action naturelle de $\mathfrak{S}_{2^k}$ sur les k premières coordonnées de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et que l'on a noté $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$ l'image de $\mathfrak{S}_{2^k}$ dans $[\mathcal{R}_0]$ via cette action (cf. chap. 2, sec. 1).

$(A_\sigma)_{\sigma\in\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}}$ est une partition de Y, et U s'écrit alors comme produit commutatif

$$U = \prod_{\sigma\in\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}} \iota_{A_\sigma}(\sigma),$$

d'où la conclusion voulue. □

Le lemme suivant est capital, puisqu'il nous permet d'engendrer facilement les groupes $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$. On définit l'odomètre non ergodique $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre classique (cf. définition 2.3). Remarquons que T engendre $\mathcal{R}_0^Y$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note également $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{2^k}$ la transposition qui échange $1^{k-1}0$ et $0^{k-1}1$, et on note $U_k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$ l'involution correspondante dans $[\mathcal{R}_0]$. Remarquons que les supports des U_k sont disjoints, ce qui nous sera très utile par la suite.

Lemme 4.14. *Soit $B \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$ est contenu dans le groupe engendré par T et $\iota_B(U_k)$.*

Démonstration. On rappelle que $T_k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$ est obtenu à partir d'un "odomètre fini" $\tau_k \in \mathfrak{S}_{2^k}$, qui agit transitivement sur $\{0,1\}^k$, et que U_k correspond à une transposition σ_k qui échange $1^{k-1}0$ et $0^{k-1}1 = \tau_k(1^{k-1}0)$.

Pour $i \in \{1,...,2^k\}$, soit $a_i = \sigma_k^{i-1}(0^k)$, remarquons que $a_{2^k} = 1^k$. Pour $i \in \{1,...,2^k - 1\}$, on note ρ_i la transposition qui échange a_i et a_{i+1}, et V_i l'élément correspondant de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$. Comme τ_k agit transitivement sur 2^k, les ρ_i engendrent $\mathfrak{S}_{2^k}$, de sorte que les V_i engendrent $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$. De plus, comme $a_{2^{k-1}} = 1^{n-1}0$, nous avons $\rho_{2^{k-1}} = \sigma_k$.

Pour $j \in \{-2^{k-1}+1,...,2^{k-1}-1\}$, la relation de conjugaison suivante est vérifiée :

$$\sigma_k^j \rho_{2^{k-1}} \sigma_k^{-j} = \rho_{2^{k-1}+j}.$$

Dans $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k} \subseteq [\mathcal{R}_0]$, une telle relation devient

$$T_k^j U_k T_k^{-j} = V_{2^{k-1}+j}.$$

Maintenant, comme T et $\iota_B(T_k)$ coïncident sur $B\times(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\setminus N_{1^k})$, et $\iota_B(U_n)$, $\iota_B(V_{2^{k-1}+j})$ agissent trivialement en dehors de $B \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la formule précédente nous donne

$$T^j \iota_B(U_k) T^{-j} = \iota_B(V_{2^{k-1}+j}).$$

Le groupe engendré par T et $\iota_B(U_k)$ contient donc $\iota_B(V_i)$ pour tout $i \in \{1,...,2^k-1\}$. Et puisque les V_i engendrent $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$, le groupe engendré par T et $\iota_b(U_k)$ contient $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$. □

Pour conclure cette section préparatoire, nous allons définir une fonction $\sqrt{\cdot} : \mathfrak{S}_{2^k} \to \mathfrak{S}_{2^{k+1}}$ telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{2^k}$, $\sigma = (\sqrt{\sigma})^2$ et $\sqrt{\sigma}$ a le même support que σ (on voit $\mathfrak{S}_{2^k} \curvearrowright \{0,1\}^k$ comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2^{k+1}} \curvearrowright \{0,1\}^{k+1}$ en le faisant agir trivialement sur la dernière coordonnée). L'idée est simplement de faire aller $\sqrt{\sigma}$ "deux fois moins vite", comme le montre la figure 1 ci-après.

Plus précisément, si $A \subseteq 2^k$ est le support de σ, on définit $\sqrt{\sigma}$ par

$$\sqrt{\sigma}(s \frown \epsilon) = \begin{cases} s \frown 1 & \text{si } s \in A \text{ et } \epsilon = 0 \\ \sigma(s) \frown 0 & \text{si } s \in A \text{ et } \epsilon = 1 \\ s \frown \epsilon & \text{si } s \notin A \end{cases}.$$

On vérifie aisément que $(\sqrt{\sigma})^2 = \sigma$, et que les supports de σ et de $\sqrt{\sigma}$, vues comme permutations de $\{0,1\}^{k+1}$, sont identiques.

On définit alors par induction sur $l \in \mathbb{N}$ des fonctions $\sqrt[2^l]{\cdot} : \mathfrak{S}_{2^k} \to \mathfrak{S}_{2^{k+l}}$ par $\sqrt[2^{l+1}]{T} = \sqrt{\sqrt[2^l]{T}}$. Par identification, on a également défini des fonctions $\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k} \to \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k+l}}$ que l'on notera encore $\sqrt[2^l]{\cdot}$.

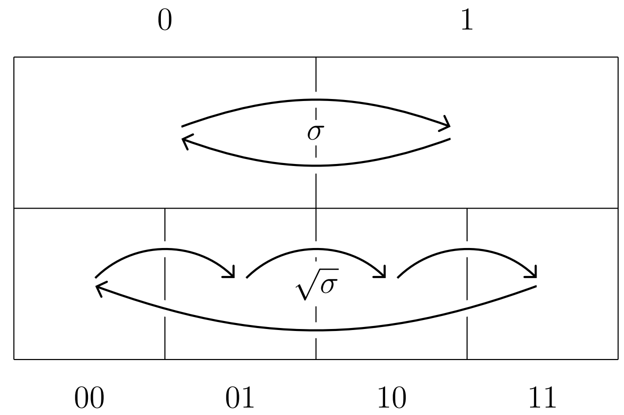

FIGURE 1. Une transposition $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ et sa racine carrée $\sqrt{\sigma} \in \mathfrak{S}_4$.

4. Deux générateurs topologiques pour le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$

Dans cette section, on trouve deux générateurs topologiques pour le groupe plein d'une relation d'équivalence hyperfinie apériodique non nécessairement ergodique. Dans le cas ergodique, ce théorème est dû à Matui [**Mat13**], et A. Marks en a une preuve très élégante disponible sur son site internet.

THÉORÈME 4.15. *Soit (Y, ν) un espace de probabilité standard, avec d'éventuels atomes, et soit $(X, \mu) = (Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$. Soit $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une partition de Y, et soit $\mathcal{R}_0^Y = \Delta_Y \times \mathcal{R}_0$ la relation d'équivalence p.m.p. sur (X, μ) définie par*

$$(y, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})) \, \mathcal{R}_0^Y (y', (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow y = y' \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, x_n = x'_n.$$

Alors il existe $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ dont le support est contenu dans $Z = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ tel que les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout $N \geqslant 0$:

(I) Le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est engendré topologiquement par $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$ et U^{2^N}, où T_0 est l'odomètre.

(II) Toutes les orbites de U sont finies et ont chacune pour cardinalité une puissance de deux.

REMARQUE 4.16. L'intérêt d'avoir le support de U inclus dans $Z = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ est qu'un tel Z a une mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{L}^2(Y, \nu)$ arbitrairement petite. Plus précisément, si $f \in \mathrm{L}^2(Y, \nu)$ est une fonction quelconque telle que $1 \geqslant f(y) > 0$ pour tout $y \in Y$, on définit $Y_k = \{y \in Y : \frac{1}{2^k} \leqslant f(y) < \frac{1}{2^{k-1}}\}$, et alors la mesure conditionnelle de $Z = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ est plus petite que f.

Avant de commencer la preuve, rappelons les notations définies dans la section précédente : $U_k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k}$ est l'involution correspondant à la transposition échangeant $1^{k-1}0$ et $0^{k-1}1$ dans $\mathfrak{S}_{2^k}$, et $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre. Étant donnés $B \subseteq Y$ et $U \in [\mathcal{R}_0]$, on définit $\iota_B(U) \in [\mathcal{R}_0^Y]$ par

$$\iota_B(U)(y,z) = \begin{cases} (y, U(z)) & \text{si } y \in B, \\ (y,z) & \text{sinon.} \end{cases}.$$

IDÉE DE LA PREUVE. Expliquons la construction d'un U de support quelconque tel que T et U engendrent topologiquement le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. On fixe une sous-algèbre M_0 dénombrable dense dans $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$ que l'on énumère en une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que chaque élément de M_0 apparaisse une infinité de fois. Remarquons que si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, alors les $\iota_{B_n}(U_{k_n})$ ont leurs supports disjoints, car les supports des U_{k_n} sont disjoints. On va construire U comme produit de racines des

$\iota_{B_n}(U_{k_n})$ pour une suite (k_i) bien choisie. Par la proposition 4.13, il suffit de montrer que le groupe fermé engendré par T et U contient tous les $\iota_{B_n}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_n}})$.

On commence avec k_1 arbitraire ; si $U = \iota_{B_1}(U_{k_1})$, alors d'après le lemme 4.14, $\iota_{B_1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_1}})$ est contenu dans le groupe engendré par T et U. Mais on veut aussi que le groupe engendré par T et U contienne $\iota_{B_2}(U_{k_2})$. Posons donc plutôt $U = \iota_{B_1}(U_{k_1})\iota_{B_2}(\sqrt{(}U_{k_2}))$, alors comme U_{k_1} est une involution, on a $U^2 = \iota_{B_2}(U_{k_2})$, et donc par le lemme 4.14 le groupe engendré par T et U contient bien $\iota_{B_2}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_2}})$. Bien sûr, il ne contient plus $\iota_{B_1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_1}})$, mais si nous choisissons k_2 suffisamment grand, le support de $\iota_{B_2}(\sqrt{U}_{k_2})$ sera très petit, de telle manière que à une petite erreur près, le groupe fini $\iota_{B_1}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_1}})$ sera toujours contenu dans le groupe engendré par T et U. En répétant ce procédé, le groupe engendré par T et U contiendra, à une erreur tendant vers zéro près, tous les $\iota_{B_i}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_i}})$. Ainsi, par la proposition 4.13, l'adhérence de ce groupe contiendra bien le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. □

Preuve du théorème 4.15. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille croissante de sous-algèbres finies de $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ dont la réunion est dense dans $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$. Soit $\mathcal{B}_n = \{A \cap (\bigcup_{i\leqslant n} Y_i) : A \in \mathcal{A}_n\}$, et soit $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Comme $\nu(\bigcup_{i\leqslant n} Y_i) \to 1$ quand $n \to +\infty$, l'ensemble dénombrable $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, avec la propriété additionnelle suivante : pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $B \times (N_{0^K} \cup N_{1^K}) \subseteq Z$. Comme le support de $\iota_B(U_k)$ est $B \times (N_{0^{k-1}1} \cup N_{1^{k-1}0})$ qui est un sous-ensemble de $B \times (N_{0^K} \cup N_{1^K})$ pour tout $k \geqslant K-1$, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.17. *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le support de $\iota_B(U_k)$ est un sous-ensemble de Z.*

Nous nous attachons tout d'abord à trouver $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ tel que la condition (I) du théorème soit vérifiée pour $N = 0$, et nous constaterons ensuite que (I) est satisfaite pour tout $N \in \mathbb{N}$, tandis que la condition (II) découlera directement de la construction. Fixons une suite de réels strictement positives $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers zéro. Par le corollaire 4.13 et par densité de $\mathcal{B}$ dans $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, il suffit de trouver $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ dont le support est un sous-ensemble de Z et une suite croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

(a) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ et une infinité de $k \in \mathbb{N}$, tout élément de $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_n}})$ est dans le ϵ_k-voisinage de $\langle T, U\rangle$.

Fixons une énumération $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}$ de sorte que chaque élément de $\mathcal{B}$ apparaisse une infinité de fois. On peut alors remplacer la condition (a) par la condition

(a') Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout élément de $\iota_{B_k}(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^{k_n}})$ appartient au ϵ_k-voisinage de $\langle T, U\rangle$.

Enfin, le lemme 4.14 nous dit que tout élément du groupe fini $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$ s'écrit comme produit fini de T et de $\iota_B(U)$. Comme cette écriture est indépendante du $B \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ choisi, on dispose de $\kappa(k) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $B \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, tout élément de $\iota_B(\widetilde{\mathfrak{S}}_{2^k})$ peut s'écrire comme mot en T et $\iota_B(U_k)$ de longueur au plus $\kappa(k)$. On fixe une telle fonction κ. Comme d_u est bi-invariante, on peut remplacer la condition (a') par la condition

(a") Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $\iota_{B_n}(U_{k_n})$ est dans le $\dfrac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}$-voisinage du groupe engendré par U.

La construction proprement dite peut commencer. Choisissons $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que le support de $\iota_{B_1}(U_{k_1})$ soit un sous-ensemble de Z (un tel k_1 existe par le lemme 4.17). Ensuite, étant donné k_n, on choisit $k_{n+1} > k_n$ tel que

(i) Le support de $\iota_{B_{n+1}}(U_{k_{n+1}})$ est un sous-ensemble Z et

(ii) $\dfrac{1}{2^{k_{n+1}-2}} < \dfrac{\epsilon_k}{\kappa(k_n)}$.

Nous pouvons dès lors définir U comme produit infini d'automorphismes de support disjoint :

$$U = \prod_{m\in\mathbb{N}} \iota_{B_m}(\sqrt[2^{m-1}]{U_{k_m}}).$$

Il nous faut vérifier que la condition (a") est satisfaite. Fixons $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} U^{2^{n-1}} &= \prod_{m\in\mathbb{N}} \iota_{B_m}(\sqrt[2^{m-1}]{U_{k_m}}^{2^n}) \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} \iota_{B_m}(U_{k_m}^{2^{n-m}}) \cdot U_{k_n} \cdot \prod_{m=n+1}^{+\infty} \iota_{B_m}(\sqrt[2^{m-n}]{U_{k_m}}) \end{aligned}$$

Comme les U_{k_m} sont des involutions, le premier produit est égal à l'identité, de sorte que

$$U^{2^{n-1}} = \iota_{B_n}(U_{k_n}) \cdot \prod_{m=n+1}^{+\infty} \iota_{B_m}(\sqrt[2^{m-n}]{U_{k_m}}). \tag{4.1}$$

Vérifions que le terme d'erreur $W_n = \prod_{m=n+1}^{+\infty} \iota_{B_m}(\sqrt[2^{m-n}]{U_{k_m}})$ est petit. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt[2^{m-n}]{U_{k_m}}$ a même support que U_{k_m} et comme les morphismes de groupe ι_{B_m} réduisent les mesures des supports, le support de W_n a mesure plus petite que

$$\sum_{m=n+1}^{+\infty} \lambda(\operatorname{supp} U_{k_m}) = \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_m-1}} \tag{4.2}$$

La suite d'entiers $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante, nous avons pour tout $m \geqslant n+1$,

$$\frac{1}{2^{k_m-1}} \leqslant \frac{1}{2^{k_{n+1}+(m-n-2)}}$$

Nous pouvons alors majorer la somme (4.2) et obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned} \mu(\operatorname{supp} W_n) &\leqslant \frac{1}{2^{k_{n+1}}} \cdot \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{m-n-2}} \\ &\leqslant \frac{4}{2^{k_{n+1}}} \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)} \end{aligned}$$

car la condition (ii) donne $\dfrac{1}{2^{k_{n+1}-2}} < \dfrac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}$. Au final, comme d_u est bi-invariante, la formule (4.1) implique que

$$\begin{aligned} d_u(U^{2^{n-1}}, \iota_{B_n}(U_{k_n})) &\leqslant \mu(\operatorname{supp}(W_n)) \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}. \end{aligned}$$

La condition (a") est donc satisfaite, de sorte que T et U engendrent topologiquement le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. En d'autres termes, la propriété (I) est vraie pour $N = 0$.

Soit maintenant $N \geqslant 0$, et posons $U' = U^{2^N}$. Par définition de la fonction racine carrée, et le fait que les U_n soient des involutions, nous obtenons

$$\begin{aligned} U' &= \prod_{m=N+1}^{+\infty} \iota_{B_m}\left(\sqrt[2^{m-N-1}]{U_{n_l}}\right) \\ &= \prod_{m\in\mathbb{N}} \iota_{B_{m+N}}\left(\sqrt[2^{m-1}]{U_{k_{N+m}}}\right). \end{aligned}$$

Donc si nous posons $B'_n = B_{N+n}$, les B'_n énumèrent toujours $\mathcal{B}$ de telle sorte que chaque élément de $\mathcal{B}$ apparait une infinité de fois. La preuve précédente s'applique donc et U' satisfait ainsi la condition

(b") Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $\iota_{B'_n}(U_{k_{n+N}})$ appartient au $\dfrac{\epsilon_{n+N}}{\kappa(k_{n+N})}$-voisinage du groupe engendré par U'.

En utilisant le même argument que celui donné pour la condition (a") sur U, on obtient que T et $U' = U^{2^N}$ engendrent topologiquement le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, autrement dit pour tout $N \in \mathbb{N}$ la condition (I) est vérifiée.

Quant à la condition (II), elle découle directement de la construction. □

Le lemme qui suit est la raison d'être de la condition (II), et servira lorsque l'on abordera les questions de généricité des générateurs topologiques (chapitre 5). On rappelle qu'un élément de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est dit périodique si presque toutes ses orbites sont finies.

Lemme 4.18. *Soit $U \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ périodique dont chaque orbite a pour cardinalité une puissance de deux. Si $C \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ est périodique avec toutes ses orbites de cardinal impair, et si son support est disjoint de celui de U, l'adhérence uniforme du sous-groupe engendré par CU contient U.*

Démonstration. Soit $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une énumération des cardinalités des orbites de C, et soit $P_n = \prod_{m\leqslant n} p_m$. Comme toutes les orbites de C sont finies, on a $C^{P_n} \to \mathrm{id}_X$ quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n l'ensemble des éléments de X dont la U-orbite est de cardinalité au plus 2^n. Les orbites de U étant toutes finies, on a $\mu(X_n) \to 1[n \to +\infty]$. Ainsi, si on pose

$$U_n(x) = \begin{cases} U(x) & \text{si } x \in X_n \\ x & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut écrire $U = U_n W_n$, où les supports de U_n et W_n sont disjoints, et $W_n \to \mathrm{id}_X$ quand $n \to +\infty$.

Comme P_n est impair on dispose de $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n P_n \equiv 1 \mod 2^n$. Alors pour tout $m \leqslant n$, on a $k_n P_n \equiv 1 \mod 2^m$, de sorte que $U_n^{k_n P_n} = U_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (CU)^{k_n P_n} &= C^{P_n k_n}(U_n W_n)^{P_n k_n} \\ &= (C^{P_n})^{k_n} U_n W_n^{P_n k_n} \to U[n \to +\infty] \end{aligned}$$ □

5. Preuve du théorème 4.10 sur le rang topologique des groupes pleins

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique. Commençons par prouver l'inégalité

$$t([\mathcal{R}]) \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \lfloor \mathrm{Coût}_{M_\mathcal{R}})(\mathcal{R})(x)\rfloor + 1.$$

Soit A un ensemble non nul $\mathcal{R}$-invariant et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\lfloor \mathrm{Coût}_{M_\mathcal{R}}(\mathcal{R})(x)\rfloor \geqslant n$ pour tout $x \in A$. Alors le coût de $\mathcal{R}$ restreinte à A est plus grand que n, ce qui nous permet d'appliquer un argument de B. Miller que voici. Tout d'abord, des générateurs topologiques du groupe plein de $\mathcal{R}$ doivent engendrer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, ce qui donne

$t([\mathcal{R}_{\restriction A}]) \geqslant n$. Maintenant, si le rang topologique de $[\mathcal{R}_{\restriction A}]$ était égal à n, le coût de $\mathcal{R}_{\restriction A}$ serait atteint par le graphage formé des n générateurs topologiques. Le coût étant atteint, ce graphage serait un arborage [**Gab00**, prop. I.11], autrement dit les n générateurs topologiques induiraient une action libre de $\mathbb{F}_n$. Ils engendreraient alors un groupe discret donc fermé, ce qui serait contradictoire puisque l'adhérence du groupe engendré doit être le groupe non dénombrable $[\mathcal{R}]$. On a donc $t([\mathcal{R}_{\restriction A}]) \geqslant n+1$, et comme la restriction des éléments de $[\mathcal{R}]$ à A est un morphisme de groupe continu, on a $t([\mathcal{R}]) \geqslant n+1$. Par définition du supremum essentiel, nous venons de prouver la première inégalité.

L'inégalité inverse demande plus de travail. Plaçons nous dans la situation donnée par la proposition 2.19. Nous avons donc un espace de probabilité standard (Y,ν) avec d'éventuels atomes tel que $X = Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et $\mu = \nu \otimes \mathcal{B}(1/2)$. De plus $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ est l'algèbre des ensembles $\mathcal{R}$-invariants, et enfin $\mathcal{R}$ contient la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0^Y = \Delta_Y \times \mathcal{R}_0$. La $M_{\mathcal{R}}$-espérance conditionnelle est alors simplement la projection sur $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$.

Soit n le supremum essentiel de la fonction $y \mapsto \lfloor \mathrm{Coût}_{M_{\mathcal{R}}}(\mathcal{R})\rfloor(y)$. Nous devons montrer que le rang topologique de $\mathcal{R}$ est égal à $n+1$. Par définition, le coût de $\mathcal{R}$ est partout strictement inférieur à $n+1$.

Fixons un graphage Φ_0 qui engendre $\mathcal{R}_0^Y$, et dont le coût est constant égal à 1. Par le lemme 4.8, on dispose d'un graphage Φ de $\mathcal{R}$ tel que $\Phi_0 \cup \Phi$ engendre $\mathcal{R}$ et le coût de Φ est partout strictement inférieur à n. Soit alors $f(y) = \frac{\mathrm{Coût}(\Phi)(y)}{n} < 1$, on peut, à l'aide de la proposition D.1, écrire $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_n$, où chaque Φ_i a coût f. Fixons une fonction à valeurs impaires $q : Y \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $y \in Y$

$$\frac{q(y)+2}{q(y)} f(y) < 1.$$

Le théorème 4.15 nous fournit des éléments T et U du groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(1) Le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est topologiquement engendré par T et U,

(2) Pour tout $C \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ dont les orbites sont finies impaires, et dont le support est disjoint du support de U, le groupe fermé engendré par UC contient U,

(3) La mesure conditionnelle du support de U est plus petite que $y \mapsto 1 - \frac{q(y)+2}{q(y)} f(y)$.

Pour p entier impair, posons $Y_p = \{y \in Y : q(y) = p\}$. Remarquons que les Y_p partitionnent Y. Par le lemme D.1, pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on dispose de sous-ensembles disjoints $A_p^1, ..., A_p^{p+2}$ de $(Y_p \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}) \setminus \mathrm{supp}\, U$, chacun de mesure conditionnelle $y \mapsto \frac{f(y)}{p}$.

Soit p un entier impair et $i \in \{1, ..., n\}$. Considérons la restriction de Φ_i à $Y_p \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

En utilisant la proposition 1.12, on peut supposer, en composant par des isomorphismes partiels de $\mathcal{R}_0^Y$ et en découpant/recollant les isomorphismes partiels qui constituent Φ_i, que la restriction de Φ_i à $Y_p \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est constituée d'un seul pré-$(p+1)$-cycle [6] $\varphi_{i,p}$ dont le domaine est $\bigsqcup_{i=1}^p A_p^i$ et qui envoie A_p^i sur A_p^{i+1} pour $i = 1, ..., p$.

Maintenant, étant donné p impair, fixons $\psi_p \in [[\mathcal{R}_0^Y]]$ de domaine A_p^{p+1} et d'image A_p^{p+2}. On prolonge chaque $\varphi_{i,p} \in \Phi_i$ en un pré-$(p+2)$-cycle en le recollant à ψ_p. Soient $\tilde{\Phi}_1, ..., \tilde{\Phi}_n$ les nouveaux graphages obtenus. Alors, $\mathcal{R}$ est toujours engendrée par $\Phi_0 \cup \tilde{\Phi}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\Phi}_n$, et chaque $\tilde{\Phi}_i$ est un pré-$(p+2)$-cycle en restriction à $Y_p \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit C_i^p le $(p+2)$-cycle correspondant, et soit $C_i \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ obtenu en recollant tous les C_i^p. Enfin, soit $U_1 = UC_1$.

Affirmation. Les $(n+1)$ éléments $T, U_1, C_2, ..., C_n$ engendrent topologiquement le groupe plein de $\mathcal{R}$.

6. Pour la définition des pré-p-cycles, cf. définition 4.12.

Preuve de l'affirmation. Soit G le groupe fermé engendré par T, U_1, C_2, C_n. Tout d'abord, d'après la condition (II) du théorème 4.15 les cardinaux des orbites de U sont tous des puissances de deux. De plus, comme C_1 est périodique d'ordre impair et de support disjoint de celui de U, on peut appliquer le lemme 4.18 pour en déduire que U appartient au groupe fermé engendré par U_1, donc $U \in G$. Alors, par la condition (I) du même théorème, G contient le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. D'après le théorème 4.4, il reste à montrer que G contient le groupe plein des $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i}$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Comme le groupe G contient $U_1 = UC_1$ et U, il contient C_1. Ainsi G contient tous les C_i pour $i = 1, ..., n$. Comme $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i}$ est engendrée par ses restrictions à chaque A_p pour p impair, il suffit de montrer que G contient le groupe plein de $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i \restriction A_p}$ pour tout p impair, et ce d'après le théorème 4.4.

Fixons un tel p. Maintenant, $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i \restriction A_p}$ est engendrée par ses restrictions à chaque $A_p^j \cup A_p^{j+1}$ où $j = 1, ..., p+1$, donc il suffit de montrer que G contient le groupe plein de ces restrictions, toujours d'après le théorème 4.4. Comme G contient le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$, et comme la restriction de $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i}$ à $A_p^{p+1} \cup A_p^{p+2}$ est égale à la restriction de $\mathcal{R}_0^Y$, G contient le groupe plein de $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i \restriction A_p^{p+1} \cup A_p^{p+2}}$, autrement dit on a le résultat pour $j = p+1$. Mais alors il suffit d'utiliser $C_i \in G$ pour conjuguer le groupe plein de $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i \restriction A_p^{p+1} \cup A_p^{p+2}}$ aux groupes pleins des restrictions de $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}_i}$ aux $A_p^j \cup A_p^{j+1}$ qui sont donc bien inclus dans G. $\square$

Chapitre 5

Généricité des générateurs topologiques

Soit G un groupe topologique dont le rang topologique $t(G)$ est fini. Considérons l'ensemble

$$\mathrm{Gen}^{t(G)}(G) = \{(g_i)_{i=1}^{t(G)} : \overline{\langle g_1, ..., g_{t(G)} \rangle} = G\}.$$

Si G est un groupe compact métrisable connexe non abélien, le théorème de Schreier-Ulam affirme que $t(G) = 2$ et que $\mathrm{Gen}^2(G)$ est un G_δ dense[1] dans $G \times G$ [**SU35**]. Par ailleurs, si G est compact métrisable connexe abélien, alors $t(G) = 1$ et $\mathrm{Gen}^1(G)$ est un G_δ dense dans G [**HS42**, thm. III]. Ainsi, pour tout groupe G compact métrisable connexe, $\mathrm{Gen}^{t(G)}(G)$ est un G_δ dense dans $G^{t(G)}$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des analogues de ce résultat pour les groupes pleins. Soit donc $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. dont le groupe plein est de rang topologique fini. La première remarque à faire est que $\mathrm{Gen}^{t([\mathcal{R}])}([\mathcal{R}])$ n'est jamais dense dans $[\mathcal{R}]^{t([\mathcal{R}])}$ (lemme 5.7), mais que c'est toujours un G_δ.

Cependant, des G_δ denses intéressants de générateurs topologiques apparaissent dès que l'on cesse de demander la densité dans $[\mathcal{R}]^{t([\mathcal{R}])}$ tout entier. Tout d'abord, on peut utiliser le théorème 4.15 pour démontrer le résultat suivant, objet de la seconde section, qui dit que la fibre de l'odomètre dans $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}_0^Y])$ est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}_0^Y]$.

Théorème 5.1. *Soit (Y, ν) un espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes, et soit $(X, \mu) = (Y \times 2^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$. Enfin, soit $\mathcal{R}_0^Y = \Delta_Y \times \mathcal{R}_0$ la relation d'équivalence p.m.p. sur (X, μ) définie par*

$$(y, z)\, \mathcal{R}_0^Y (y', z') \iff y = y' \text{ et } z\, \mathcal{R}_0\, z'.$$

Enfin, soit $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre. Alors l'ensemble des $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ tels que $\overline{\langle T, U \rangle} = [\mathcal{R}_0^Y]$ est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}_0^Y]$.

Soit maintenant APER l'ensemble des éléments apériodiques de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$, i.e. l'ensemble des automorphismes dont toutes les orbites sont infinies. Il est fermé pour la topologie uniforme, et c'est un G_δ dense pour la topologie faible. On peut alors obtenir des résultats du même type que le théorème de Schreier-Ulam, à condition de forcer la première coordonnée d'un couple de générateurs topologiques à être apériodique. C'est l'objet du théorème qui suit, que l'on établira au cours de la seconde section (théorème 5.16).

Théorème 5.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique de coût 1. Alors l'ensemble*

$$\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}]) \cap (\mathrm{APER} \times [\mathcal{R}])$$

est un G_δ dense de $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}]$.

1. Un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts. Rappelons le théorème de Baire qui affirme que dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Dire qu'un ensemble contient un G_δ dense revient donc à dire qu'il est "de mesure pleine", dans un sens topologique. On parle aussi d'ensemble comaigre. Une très bonne référence concernant le lien entre ensembles de mesure pleine et ensembles comaigres est [**Oxt80**].

La troisième section permet de préciser le théorème précédent en montrant que parmi les couples de générateurs topologiques du groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p. apériodique de coût un , il y a un G_δ dense de couples engendrant un groupe libre de rang 2 (théorème 5.18). Ce résultat sera établi comme conséquence du théorème suivant, intéressant en lui-même.

THÉORÈME 5.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p., et soit $S \in [\mathcal{R}]$ non périodique. Alors l'ensemble des $T \in [\mathcal{R}]$ tels que le groupe engendré par S et T soit un groupe libre de rang 2 est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}]$.*

Soit maintenant $\mathcal{R}_0$ la relation d'équivalence p.m.p. hyperfinie ergodique sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui identifie deux suites coïncidant à l'infini (cf. chapitre 2). Alors l'ensemble des éléments apériodiques de $[\mathcal{R}_0]$ qui engendrent $\mathcal{R}_0$ est un G_δ dense dans $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}_0]$, de sorte que le théorème 5.2 implique que parmi les générateurs de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0$, on dispose d'un G_δ dense d'éléments T tels que

$$\{U \in [\mathcal{R}] : \overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}]\}$$

soit un G_δ dense.

QUESTION. *Est ce que dès lors que T engendre $\mathcal{R}_0$, l'ensemble $\{U \in [\mathcal{R}] : \overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}]\}$ est dense dans $[\mathcal{R}]$?*

Le théorème suivant fournit une réponse positive dans le cas où T est de rang un.

THÉORÈME 5.4. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ de rang un, soit $\mathcal{R}_T$ la relation d'équivalence engendrée par T. Alors l'ensemble*

$$\{U \in [\mathcal{R}_T] : \overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}_T]\}$$

est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}_T]$.

Dans le cas général, on ne sait même pas s'il existe un seul U tel que $\overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}_T]$.

1. Terminologie et premiers résultats

Commençons par quelques remarques concernant l'ensemble des générateurs d'une relation d'équivalence p.m.p., puis l'ensemble des générateurs topologiques d'un groupe plein.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ l'ensemble des n-uplets d'éléments du groupe plein de $\mathcal{R}$ engendrant la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, et $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ l'ensemble des n-uplets d'éléments du groupe plein de $\mathcal{R}$ engendrant topologiquement $[\mathcal{R}]$.

Commençons par un lemme qui a déjà été exploité pour minorer le rang topologique en fonction du coût, dont nous redonnons la preuve ici pour le confort du lecteur.

LEMME 5.5. *Pour toute relation d'équivalence p.m.p. $\mathcal{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}]) \subseteq \mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$, autrement dit si $(T_1, ..., T_n)$ engendrent topologiquement le groupe plein de $\mathcal{R}$, alors ils engendrent $\mathcal{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soient $(T_1, ..., T_n)$ des générateurs topologiques du groupe plein de $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence qu'ils engendrent, alors $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$. Comme les groupes pleins sont fermés pour la topologie uniforme (proposition 1.4), et comme $T_1, ..., T_n \in \mathcal{R}'$ engendrent un sous-groupe dense de $[\mathcal{R}]$, on doit avoir $[\mathcal{R}] = [\mathcal{R}']$. Ainsi, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ et donc $T_1, ..., T_n$ engendrent $\mathcal{R}$. □

Passons maintenant à un fait général sur la structure de $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ et de $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$. Rappelons que, si X est un espace topologique, un sous-ensemble A de X est appelé un G_δ si on peut l'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts de X.

LEMME 5.6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ *ainsi que* $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ *sont des* G_δ *dans* $[\mathcal{R}]^n$.

DÉMONSTRATION. Soit Γ un groupe dénombrable tel que $\mathcal{R}$ soit engendrée par Γ. Alors $\mathcal{R}$ est engendrée par $T_1, ..., T_n \in [\mathcal{R}]$ ssi pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un entier N tel que l'ensemble

$$\left\{x \in X : \exists(\epsilon_k)_{k=1}^N \in \{-1,0,1\}^N, \exists(i_k)_{k=1}^N \in \{1,...,n\}^N \text{ tels que } \gamma \cdot x = T_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots T_{i_N}^{\epsilon_N} x\right\}$$

soit de mesure strictement plus grande que $1-\epsilon$. Cette dernière condition étant ouverte, on en déduit que $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ est un G_δ.

Concernant le fait que $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ soit un G_δ dans $[\mathcal{R}]^n$, il suffit d'utiliser le fait que $[\mathcal{R}]$ est un groupe polonais. En effet, soit $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de $[\mathcal{R}]$, alors $(T_1, ..., T_n)$ engendre un sous-groupe dense de G ssi pour tout $p \in \mathbb{N}$, O_p contient un mot en les T_i, condition une fois de plus ouverte, d'où le fait que $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ soit un G_δ. □

LEMME 5.7. *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence p.m.p. différente de l'égalité, et soit* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ *n'est pas dense dans* $[\mathcal{R}]^n$, *et donc* $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ *n'est pas non plus dense dans* $[\mathcal{R}]^n$.

DÉMONSTRATION. Le fait que $\mathcal{R}$ soit différente de l'égalité implique que son coût c est strictement positif. Supposons que $\mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ soit dense dans $[\mathcal{R}]^n$. Alors il doit exister $(T_1, ..., T_n) \in \mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $d_u(T_i, \mathrm{id}_X) < \frac{c}{n}$. Soit alors, pour $i = \{1, ..., n\}$, $\varphi_i = T_{i\restriction \mathrm{supp}\, T_i}$. Comme les T_i engendrent $\mathcal{R}$, $(\varphi_i)_{i=1}^n$ engendre $\mathcal{R}$, mais est de coût strictement plus petit que c, contradiction.

Comme d'après le lemme 5.5, $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}]) \subseteq \mathrm{Gen}^n(\mathcal{R})$, l'ensemble $\mathrm{Gen}^n([\mathcal{R}])$ ne peut pas non plus être dense dans $[\mathcal{R}]^n$. □

DÉFINITION 5.8. Un élément T de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est dit **apériodique** si toutes ses orbites sont infinies, autrement dit si la relation d'équivalence p.m.p. qu'il engendre est apériodique. On note APER l'ensemble des éléments apériodiques de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

LEMME 5.9. APER *est un fermé de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *pour la topologie uniforme, et un* G_δ *dense de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *pour la topologie faible.*

DÉMONSTRATION. Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. On a $T \in$ APER ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, le support de T^n est de mesure pleine, autrement dit ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_u(\mathrm{id}_X, T^n) = 1$. Ainsi APER est un fermé de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ pour la topologie uniforme.

Concernant la topologie faible, supposons que le support de T^n soit de mesure pleine. Alors pour tout $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ non nul, il existe $B \subseteq A$ tel que $T^n(B) \neq B$ (cf. lemme B.4). D'après le lemme 3.8 appliqué à l'application de premier retour induite par T^n sur $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, on a en fait que pour tout $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, il existe $B \subseteq A$ tel que $T^n(B)$ soit disjoint de B et $\mu(B) \geqslant \frac{1}{3}\mu(A)$. Soit M_0 une sous-algèbre dénombrable dense M_0 de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, alors on a en particulier que

(∗) pour tout $A \in M_0$ il existe $B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ contenu dans A tel que $T^n(B)$ soit disjoint de B et $\mu(B) \geqslant \frac{1}{3}\mu(A)$.

La condition (∗) est G_δ pour la topologie faible, et implique clairement que le support de T^n soit de mesure pleine, d'où le fait que l'ensemble des éléments apériodiques de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ soit un G_δ dans ce dernier pour la topologie faible.

Reste à voir que APER est dense dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ pour la topologie faible. Soit donc $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on définit $A_n \subseteq X$ comme l'ensemble des $x \in X$ dont la T-orbite est de cardinal n. On va montrer que l'on peut approcher faiblement chaque $T_{\restriction A_n} \in \mathrm{Aut}(A_n, \frac{\mu}{\mu(A_n)})$ par un automorphisme apériodique. Par recollement, on aura le résultat voulu sur T, ce qui nous ramène au cas où toutes les orbites de T sont de cardinal n pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Soit donc $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ dont toutes les orbites sont de cardinal n. Par le même argument que pour établir l'unicité des relations de type I_n (cf. proposition 1.48), on voit que T est conjugué à une rotation d'angle $2\pi/n$ sur le cercle. Pour approcher cette dernière par des automorphismes apériodiques, il suffit de prendre une suite de rotations d'angles irrationnels convergeant vers $2\pi/n$, la convergence faible d'une telle suite vers la rotation d'angle $2\pi/n$ étant une conséquence directe du corollaire C.12. $\square$

Si G est un groupe plein, on rappelle que μ_G est la mesure conditionnelle par rapport à la sous-algèbre M_G constituée des $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tels que $gA = A$ pour tout $g \in G$. On a également défini une distance d_G sur G par

$$d_G(T,U) = \left\|\mu_G(\mathrm{supp}(T^{-1}U))\right\|_\infty,$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme usuelle sur $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$. En général, la distance d_G raffine la topologie uniforme, mais elle coïncide avec la distance uniforme dès lors que G est ergodique. Rappelons également que si $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, on note M_T l'algèbre des $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tels que $T(A) = A$, et μ_T la mesure conditionnelle correspondante.

LEMME 5.10. *Soit G un groupe plein de type II. Alors si $S \in G$ a toutes ses orbites de cardinalité n, et si $T \in G$ est apériodique, alors il existe $U \in G$ tel que $d_G(S, UTU^{-1}) \leqslant \frac{2}{n}$.*

DÉMONSTRATION. Soient $S \in G$ dont toutes les orbites sont de cardinalité n, et soit $T \in \mathrm{APER} \cap G$. Appliquons le lemme de Rohlin (lemme 2.27) à T pour $\epsilon = \frac{1}{n}$ et $N = n$. On trouve alors $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tel que

$$\mu_T(X \setminus \bigsqcup_{j=0}^{n-1} T^j(A)) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme M_T contient M_G, l'inégalité précédente reste valable en remplaçant μ_T par μ_G, d'où $\mu_G(A) \geqslant \frac{1-1/n}{n}$. Partitionons $X \setminus \bigsqcup_{j=0}^{n-1} T^j(A)$ en n ensembles $(A'_j)_{j=0}^{n-1}$ d'égale mesure conditionnelle, puis fixons $\tilde{T} \in G$ de tel que pour tout $j \in \{0,...,n-1\}$, $\varphi(A'_j) = A'_{j+1 \mod n}$.

Soit B un domaine fondamental de la relation d'équivalence engendrée par S, alors comme S préserve la mesure conditionnelle par rapport à G, on a $\mu_G(B) = \frac{1}{n}$. Soit alors A' disjoint de A dont la mesure conditionnelle est égal à $\frac{1}{n} - \mu_G(A)$.

Fixons $\psi \in [[G]]$ de domaine $A \sqcup A'_0$ et d'image B. On prolonge alors ψ un élément U du groupe plein G en posant, pour tout $j \in \{0,...,n-1\}$

$$U(x) = \begin{cases} S^j\psi T^{-j}(x) & \text{si } x \in T^j(A) \\ S^j\psi\tilde{T}^{-j}(x) & \text{si } x \in A'_j. \end{cases}$$

Comme U conjugue la restriction de T à $\bigsqcup_{j=0}^{N-2} T^j(A)$ avec la restriction de S à $\bigsqcup_{j=0}^{N-2} S^j(B)$, et comme $\mu_G(A) \geqslant \frac{1-1/n}{n}$, on a bien $d_G(S, UTU^{-1}) \leqslant \frac{2}{n}$. $\square$

COROLLAIRE 5.11. *Soit G un groupe plein de type II, et soit $T \in G$ apériodique. Alors la classe de conjugaison de T est d_G-dense dans* $\mathrm{APER} \cap G$. *En particulier, elle est d_u-dense dans* $\mathrm{APER} \cap G$.

DÉMONSTRATION. Soient $T, T' \in G$ apériodiques, et $n \in \mathbb{N}$. Fixons $S \in G$ dont toutes les orbites sont de cardinalité $n \in \mathbb{N}$. Alors les classes de conjugaisons de T et de T' contiennent S à $\frac{2}{n}$ près, d'où l'existence de $U \in G$ tel que $d_G(T, UT'U^{-1}) \leqslant \frac{4}{n}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient la conclusion voulue. $\square$

Corollaire 5.12. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodique, alors sa classe de conjugaison est faiblement dense dans* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

Démonstration. D'après le corollaire précédent appliqué au groupe plein ergodique $G = \mathrm{Aut}(X,\mu)$, la classe de conjugaison de T est uniformément dense dans APER, en particulier elle faiblement dense dans APER. Mais le lemme 5.9 nous indique que APER lui-même est faiblement dense dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, d'où le résultat. $\square$

2. Beaucoup de générateurs topologiques pour des groupes pleins

Le but de cette section est de montrer que, si $\mathcal{R}$ est apériodique de coût 1, alors l'ensemble $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ induit un G_δ dense sur $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}]$. On va commencer par le cas plus facile où $\mathcal{R}$ est hyperfinie, qui n'utilise que le théorème 4.15.

Théorème 5.13. *Soit (Y,ν) un espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes, et soit $(X,\mu) = (Y \times 2^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$. Soit $\mathcal{R}_0^Y$ la relation d'équivalence p.m.p. sur (X,μ) définie par*

$$(y,z)\,\mathcal{R}_0^Y(y',z') \iff y = y' \text{ et } z\,\mathcal{R}_0\,z'.$$

Enfin, soit $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre. Alors l'ensemble des $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ tels que $\overline{\langle T,U\rangle} = [\mathcal{R}_0^Y]$ est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}_0^Y]$.

Démonstration. Tout d'abord, l'ensemble de tels U est un G_δ d'après le lemme 5.6 (c'est une section verticale de $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$).

Il s'agit donc de montrer qu'un tel ensemble est dense. Rappelons que si $s \in \{0,1\}^n$, on note N_s le cylindre formé des $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ commençant par s. D'après le corollaire 5.10, les éléments d'ordre fini sont denses dans le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$. Par continuité de $A \mapsto T_A$ (cf. définition 2.25), on obtient que les éléments d'ordre fini dont le support n'intersecte pas $Y \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ sont denses dans $[\mathcal{R}_0^Y]$ puisque la mesure de $Y \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ tend vers 0. Il suffit donc, étant donné un tel élément C et $\epsilon > 0$, de trouver un $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ de support de mesure plus petite que ϵ et tel que $\langle T, CU\rangle$ soit un sous-groupe dense de $[\mathcal{R}_0^Y]$.

Fixons donc un tel C et $\epsilon > 0$. Soit K un entier tel que C^{2^K} n'a que des orbites de cardinalité impaire. Fixons également $k \in \mathbb{N}$ tel que $Y \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$ soit disjoint du support de C, et $\mu(Y \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})) < \epsilon$.

Le théorème 4.15 nous fournit $U \in [\mathcal{R}_0^Y]$ dont le support est un sous-ensemble de $Z = Y \times (N_{0^{k+1}} \cup N_{1^{k+1}})$, et tel que le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ est topologiquement engendré par T et U^{2^K}. Comme C et U ont leurs supports disjoints, la condition (II) du théorème 4.15 nous assure que U^{2^K} appartient au groupe topologiquement engendré par $(CU)^{2^K}$, et donc appartient également au groupe topologiquement engendré par CU. Comme $[\mathcal{R}_0^Y]$ est topologiquement engendré par T et U^{2^K}, nous obtenons la conclusion voulue. $\square$

Corollaire 5.14. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence hyperfinie apériodique. Alors* $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ *induit un G_δ dense de* $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}]$.

Démonstration. D'après le théorème de Dye (théorème 2.28), on peut se mettre dans la situation du théorème précédent, c'est-à-dire supposer que $(X,\mu) = (Y \times 2^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$, et que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0^Y = \Delta_Y \times \mathcal{R}_0$. Si on note $T = \mathrm{id}_Y \times T_0$, où T_0 est l'odomètre, on sait que la fibre de $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ au dessus de T est dense. Comme la classe de conjugaison de T est dense dans $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$ (lemme 5.11), on dispose d'un ensemble dense de $T \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$ dont la fibre dans $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ est dense, d'où la densité de $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}]) \cap (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}] \times [\mathcal{R}])$ dans $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}] \times [\mathcal{R}]$.

Le fait que ce soit un G_δ est une conséquence directe du lemme 5.6. $\square$

Remarque 5.15. Soit maintenant T l'odomètre et $\mathcal{R}_0$ la relation d'équivalence ergodique qu'il engendre (cf. proposition 2.2). Par le théorème 1.17, $[\mathcal{R}_0]$ est faiblement dense dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, donc les générateurs topologiques uniformes de $[\mathcal{R}_0]$ sont des générateurs topologiques faibles de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Le théorème 5.13 nous garantit que l'ensemble des $U\in[\mathcal{R}_0]$ tels que $\langle T,U\rangle$ soit uniformément dense dans $[\mathcal{R}_0]$ est lui-même uniformément dense dans $[\mathcal{R}_0]$, d'où le fait que l'ensemble des $U\in\mathrm{Aut}(X,\mu)$ tels que $\{T,U\}$ engendre topologiquement $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ soit dense dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

Comme la classe de conjugaison de T est faiblement dense dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ (corollaire 5.12), on en déduit comme précédemment que $\mathrm{Gen}^2(\mathrm{Aut}(X,\mu))$ est un G_δ dense de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, ce qui est un théorème de V. Prasad [**Pra81**]. Sa preuve est beaucoup plus élégante, mais ne donne pas de générateurs topologiques explicites, ce qui par ailleurs avait été fait par R. Grząślewicz [**Grz84**].

Le théorème suivant généralise le théorème 5.13, et sa preuve suit les mêmes lignes tout en réutilisant des idées de la démonstration de la formule reliant nombre de générateurs et coût (théorème 4.10).

Théorème 5.16. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique de coût 1. Alors l'ensemble*
$$\{(T,U)\in(\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}])\times[\mathcal{R}]:\overline{\langle T,U\rangle}=[\mathcal{R}]\}$$
est un G_δ dense de $(\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}])\times[\mathcal{R}]$.

Démonstration. Reprenant la terminologie établie dans la section 1, on voit qu'il nous faut montrer que $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ induit un G_δ dense sur $(\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}])\times[\mathcal{R}]$. Par le lemme 5.6, $\mathrm{Gen}^2([\mathcal{R}])$ est un G_δ, et il suffit donc de montrer qu'il est dense. Comme pour la preuve du théorème 5.14, le fait que la classe de conjugaison de tout $T\in\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}]$ soit dense dans $\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}]$ nous ramène à devoir trouver un seul $T\in\mathrm{APER}\cap[\mathcal{R}]$ tel que l'ensemble $\{U\in[\mathcal{R}]:\overline{\langle T,U\rangle}=[\mathcal{R}]\}$ soit dense dans $[\mathcal{R}]$.

D'après le théorème 2.21, on peut supposer que $X=Y\times 2^{\mathbb{N}}$ est muni de la mesure de probabilité produit $\mu=\nu\otimes\mathcal{B}(1/2)$, où (Y,ν) est un espace de probabilité standard avec d'éventuels atomes, et que $\mathcal{R}$ contient la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0^Y$ définie par
$$(y,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}))\,\mathcal{R}_0^Y(y',(x'_n)_{n\in\mathbb{N}})\Leftrightarrow y=y'\text{ et }\exists p\in\mathbb{N},\forall n\geqslant p, x_n=x'_n.$$
Rappelons que $\mathcal{R}_0^Y$ est engendrée par $T=\mathrm{id}_Y\times T_0$, où T_0 est l'odomètre. Nous allons montrer que l'ensemble $\{U\in[\mathcal{R}]:\overline{\langle T,U\rangle}=[\mathcal{R}]\}$ est dense dans $[\mathcal{R}]$, ce qui achèvera la preuve.

D'après le lemme 5.10, l'ensemble des éléments d'ordre fini est dense dans $[\mathcal{R}]$. Comme la mesure de $Y\times(N_{0^{k+1}}\cup N_{1^{k+1}})$ tend vers zéro quand k tend vers l'infini, l'ensemble des éléments d'ordre fini dont le support est disjoint de $Y\times(N_{0^{k+1}}\cup N_{1^{k+1}})$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$ est lui-même dense dans $[\mathcal{R}]$.

Soit donc $C\in[\mathcal{R}]$ un tel élément d'ordre fini et $\epsilon>0$. Soit $2^K N$ l'ordre de C, avec N impair, et soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $Y\times(N_{0^{k+1}}\cup N_{1^{k+1}})$ soit disjoint du support de C et que $\mu(Y\times(N_{0^{k+1}}\cup N_{1^{k+1}}))<\epsilon$. Fixons ensuite un entier impair M premier avec N.

Le théorème 4.15 nous fournit $U\in[\mathcal{R}_0^Y]$ dont le support est un sous-ensemble de $Z=Y\times(N_{0^{k+2}}\cup N_{1^{k+2}})$ et tel que le groupe plein de $\mathcal{R}_0^Y$ soit topologiquement engendré par T et U^{2^K}.

Comme $\mathcal{R}$ est apériodique, son coût conditionnel est supérieur ou égal à 1. Puisque $\mathcal{R}$ a coût 1, son coût conditionnel doit donc être constant égal à un. Par le même raisonnement qu'au cours de la preuve du théorème 4.10, on exhibe $C'\in[\mathcal{R}]$ d'ordre M dont le support est inclus dans $Y\times(N_{0^{k+1}1})$ (donc disjoint des supports de U et C), tel que chaque C'-orbite contienne un x tel que $x\,\mathcal{R}_0^Y\,C'(x)$ et enfin tel que $\mathcal{R}$ soit engendrée par T et C'. On définit alors $U' = UCC'$, de sorte que U' est ϵ-proche de C. La preuve sera donc terminée une fois l'affirmation suivante prouvée.

AFFIRMATION. T et U' engendrent topologiquement $[\mathcal{R}]$.

En effet, soit G le groupe fermé engendré par T et U'. Comme C, C' sont de support disjoint, ils commutent, et leur ordres respectifs sont $2^K N$ et M avec M, N impairs. Ainsi $(CC')^{2^K}$ est d'ordre impair. Comme le support de U est disjoint de celui (CC'), le support de U^{2^K} est également disjoint de celui de $(CC')^{2^K}$. Comme les orbites de U^{2^K} sont toutes de cardinal une puissance de deux par la condition (II) du théorème 4.15, le lemme 4.18 appliqué à l'élément périodique $(CC')^{2^K}$ et à U^{2^K} nous assure alors que U^{2^K} appartient au groupe topologiquement engendré par $U'^{2^K} = (CC')^{2^K} U^{2^K}$. Ainsi d'après la condition (I) du théorème 4.15, le groupe G contient $[\mathcal{R}_0^Y]$.

Le groupe G contient alors $CC' = U'U^{-1}$, mais par le théorème des restes chinois, comme C et C' commutent et leurs ordres sont premiers entre eux, G contient C'. Maintenant, comme chaque orbite de C' contient un x tel que $x\,\mathcal{R}_0^Y\, C'(x)$, la même preuve que pour le théorème 4.15 nous donne que G contient le groupe plein engendré par C', et contient donc $[\mathcal{R}]$ par le théorème 4.3. □

3. Sous-groupes libres denses

Dans cette section, nous nous intéressons à l'ensemble des couples d'éléments d'un groupe plein engendrant un groupe libre à deux générateurs. Notre approche est différente de celle d'A. S. Kechris , qui a démontré le théorème suivant [**Kec10**, thm. 3.9].

THÉORÈME 5.17 (Kechris). *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p.. Alors*

$$\{(T, U) \in (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) : T \textit{ et } U \textit{ engendrent un groupe libre}\}$$

est un G_δ dense dans $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}])$.

Ce théorème ne dit rien sur l'ensemble des couples $(T, U) \in (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}]$ engendrant un groupe libre, or on a vu que dans le cas où $\mathcal{R}$ est apériodique de coût un, on a un G_δ dense de telles paires engendrant un sous-groupe dense (théorème 5.16). Une adaptation immédiate de la preuve d'A. Kechris permet cependant de montrer le théorème qui suit.

THÉORÈME 5.18. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique. Alors*

$$\{(T, U) \in (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}] : T \textit{ et } U \textit{ engendrent un groupe libre}\}$$

est un G_δ dense.

En réunissant le théorème précédent au théorème 5.16, nous obtenons beaucoup de sous-groupes libres denses dans les groupes pleins de relations p.m.p. apériodiques de coût un.

COROLLAIRE 5.19. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p. apériodique de coût un. Alors l'ensemble*

$$\{(T, U) \in (\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}] : T \textit{ et } U \textit{ engendrent un groupe libre dense dans } [\mathcal{R}]\}$$

est un G_δ dense de $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]) \times [\mathcal{R}]$.

Il est temps de donner un théorème duquel se déduisent immédiatement les théorèmes 5.18 et 5.17, et qui implique que tout élément d'ordre infini du groupe plein d'une relation d'équivalence p.m.p. peut être complété en une base d'un groupe libre de rang arbitraire.

THÉORÈME 5.20. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence p.m.p., et soit $T \in [\mathcal{R}]$ d'ordre infini. Les assertions suivantes sont alors vérifiées.*

(1) L'ensemble des $U \in [\mathcal{R}]$ tels que le groupe engendré par T et U soit un groupe libre de rang 2 est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}]$.

(2) Si $\mathcal{R}$ est apériodique, l'ensemble des $U \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$ tels que $\langle T, U\rangle$ soit libre de rang 2 est un G_δ dense dans $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$.

REMARQUE 5.21. Le fait de supposer que $T \in [\mathcal{R}]$ soit d'ordre infini est nécessaire, puisque dès lors que T est d'ordre fini, il ne peut pas appartenir à un groupe libre.

DÉMONSTRATION. Si w est un mot réduit en t et u, on note $w(\varphi, \psi)$ l'évaluation de ce mot en $(\varphi, \psi) \in [[\mathcal{R}]]^2$ (on compose les isomorphismes partiels là où ils sont définis).

Soit T un élément d'ordre infini du groupe plein de $\mathcal{R}$. Il suffit de montrer que pour tout w mot réduit en t et u non vide, l'ensemble des $U \in [\mathcal{R}]$ (respectivement $U \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$ dans le cas où $\mathcal{R}$ est apériodique) tels que $w(T,U) \neq 1$ est dense dans $[\mathcal{R}]$ (respectivement dans $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$), puisque ces ensembles sont ouverts et que leurs intersections respectives sur tous les mots réduits w constituent l'ensemble des (T,U) tels que T et U engendrent un groupe libre.

Fixons donc un mot réduit w, $\delta > 0$ et $U \in [\mathcal{R}]$ (respectivement $U \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$). On veut trouver $U' \in [\mathcal{R}]$ (respectivement $U' \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$) tel que $d_u(U,U') < \delta$ et $w(T,U') \neq \mathrm{id}_X$. Comme T est d'ordre infini, cette assertion est vérifiée automatiquement pour les mots w qui sont des puissances de T. On peut donc supposer que w contient au moins une occurrence de u. Quitte à conjuguer w, on peut ensuite supposer que w finit par u ou u^{-1}. Soit n la longueur de w.

Comme T est d'ordre infini, ses orbites sont de cardinalité non bornée, et on trouve donc $A \subseteq X$ non nul tel que les $T^j(A)$, pour $j \in \{0, ..., 2(n+1)^2\}$, soient tous disjoints. Quitte à réduire A, on peut supposer, par continuité de[2] $C \mapsto U_C$, que

$$d_u(U, U_{X \setminus \bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)}) < \frac{\delta}{2}.$$

On peut également supposer que $\mu(\bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)) < \frac{\delta}{2}$. Pour $i \in \{0, ..., n\}$ et $j \in \{-n, ..., n\}$, on pose $A_{i,j} = T^{j+n+2(n+1)i}(A)$, que l'on pense comme un carré de côté un dans le plan, centré en (i,j) (cf. figure 1).

On écrit $w = w_n \cdots w_1$, avec $w_k \in \{t, t^{-1}, u, u^{-1}\}$. Définissons par récurrence sur $k \in \{0, ..., n\}$ une suite de couples d'entiers $(i_k, j_k)_{k=0}^n$ en posant $(i_0, j_0) = (0,0)$, puis

$$(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_k, j_k) + \begin{cases} (0,1) & \text{si } w_k = t \\ (0,-1) & \text{si } w_k = t^{-1} \\ (1,0) & \text{si } w_k = u^{\pm 1} \end{cases}.$$

Notons que la suite (i_k, j_k) est injective car w est un mot réduit. On va maintenant construire un isomorphisme partiel $\varphi \in [[\mathcal{R}]]$ tel que $w(T, \varphi)$ "suive le même chemin" que la suite (i_k, j_k) (cf. figure 1).

Soit K^+ l'ensemble des $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $w_k = u$, et K^- l'ensemble des $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $w_k = u^{-1}$. Pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\} \times \{-n, ..., n\}$, on choisit un isomorphisme partiel $\psi_{i,j} \in [[\mathcal{R}]]$ de domaine $A_{i-1,j}$ et d'image $A_{i,j}$.

On définit alors l'isomorphisme partiel annoncé $\varphi \in [[\mathcal{R}]]$ par recollement

$$\varphi = \bigsqcup_{k \in K^+} \psi_{i_k, j_k} \sqcup \bigsqcup_{k \in K^-} \psi_{i_k, j_k}^{-1}.$$

Notons que φ est bien défini car un élément de K^+ n'est jamais consécutif à un élément de K^- et vice versa, puisque w est un mot réduit. Par construction pour tout

2. Rappelons que si $C \subseteq X$ et $U \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, l'application U_C est l'application de premier retour induite par U sur C (cf. définition 2.25).

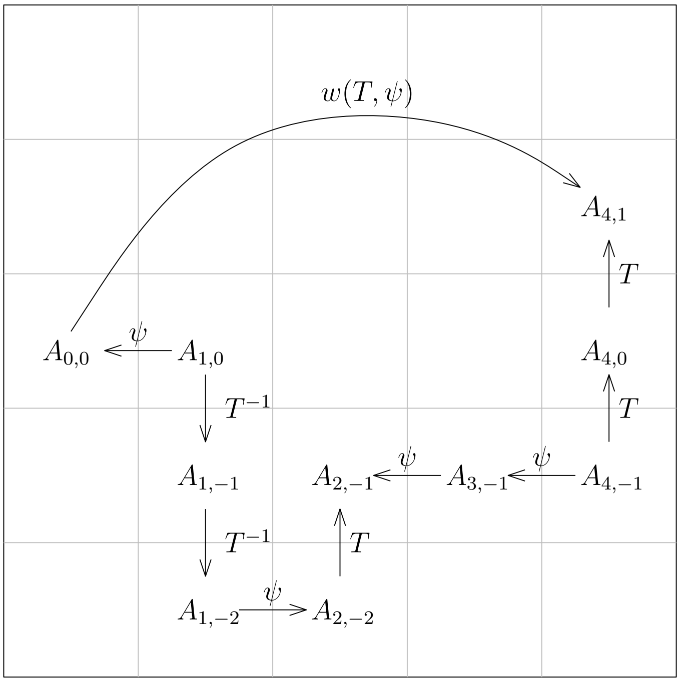

FIGURE 1. La construction de ψ pour $w = t^2u^{-2}tut^{-2}u^{-1}$

$k \in \{1, ..., n\}$, $w_k \cdots w_1(T, \varphi)$ a pour domaine $A_{i_0,j_0} = A_{0,0}$ et pour image A_{i_k,j_k}. En particulier $w_n \cdots w_1(T, \varphi) = w(T, \varphi)$ est de domaine disjoint de son image.

On va maintenant trouver $U' \in [\mathcal{R}]$ (respectivement $U' \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$) proche de U et prolongeant φ. Rappelons tout d'abord que l'on a

$$d_u(U, U_{X \setminus \bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)}) < \frac{\delta}{2},$$

et que le domaine ainsi que l'image de φ sont inclus dans $\bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)$.

Dans le cas (1) où l'on veut seulement $U' \in [\mathcal{R}]$, on peut d'après la proposition 1.15 prolonger φ en un élément $\tilde{U}$ du groupe plein de la restriction de $\mathcal{R}$ à $\bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)$. Dans le cas (2) où l'on veut de plus que U' soit apériodique, comme φ est obtenu en recollant des pré-p-cycles de supports disjoints, on peut par apériodicité de $\mathcal{R}$ le prolonger en un élément apériodique $\tilde{U}$ du groupe plein de la restriction de $\mathcal{R}$ à $\bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)$ (utiliser le même raisonnement que pour prolonger les échelles dans la preuve du théorème 2.19). On pose alors

$$U'(x) = \begin{cases} \tilde{U}(x) & \text{si } x \in \bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A), \\ U_{X \setminus \bigsqcup_{j=0}^{2(n+1)^2} T^j(A)}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est alors clair que $d_u(U, U') < \delta$, et comme U' prolonge φ, on a bien $w(T, U') \neq \mathrm{id}_X$. Enfin, U' appartient à $[\mathcal{R}]$ (respectivement à $\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$). $\square$

REMARQUE 5.22. Le raisonnement ci-dessus s'adapte aisément pour montrer que si $T \in [\mathcal{R}]$ est d'ordre infini et $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des $(S_1, ..., S_n) \in [\mathcal{R}]$ (respectivement $(S_1, ..., S_n) \in \mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}]$ dans le cas où $\mathcal{R}$ est apériodique) tels que $(T, S_1, ..., S_n)$ soit la base d'un groupe libre est un G_δ dense dans $[\mathcal{R}]^n$ (respectivement dans $(\mathrm{APER} \cap [\mathcal{R}])^n$).

4. Automorphismes de rang un

Définition 5.23. Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, et $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$. Si $N \in \mathbb{N}$ est le plus grand entier tel que $A, T(A), ..., T^{N-1}(A)$ soient disjoints, on définit la partition $\mathcal{P}_{A,T}$ de $Y_{A,T} = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} T^i(A)$ par

$$\mathcal{P}_{A,T} = \big(A, T(A), ..., T^{N-1}(A)\big)\big)$$

On note alors $M_{A,T}$ la sous-algèbre finie de $\mathrm{MAlg}(Y_{A,T}, \mu_{Y_{A,T}})$ engendrée par $\mathcal{P}_{A,T}$.

Notons que le lemme de Rohlin (lemme 2.27) nous garantit l'existence de partitions $\mathcal{P}_{A,T}$ dont les atomes sont de mesure arbitrairement petite, avec $\mu(Y_{A,T})$ arbitrairement proche de 1.

Définition 5.24. Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. On dit que T est **de rang un** si pour tout $\epsilon > 0$, et toute famille finie $(B_i)_{i=1}^k$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, il existe $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $A_1, ..., A_k \in M_{A,T}$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., k\}$,

$$\mu(A_i \bigtriangleup B_i) < \epsilon.$$

Exemple 5.25. Si T_0 est l'odomètre sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on voit que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'algèbre engendrée par les cylindres de longueur n est du type M_{A,T_0} (par exemple avec $A = N_{0^n}$). Comme la réunion croissante de ces algèbres est dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, l'odomètre est de rang un. C'est en fait le cas de tout élément de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ compact [3] d'après un résultat d'A. del Junco [**dJ76**].

Lemme 5.26 (Folklore). *Les automorphismes de rang un forment un G_δ dense de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *muni de la topologie faible.*

Démonstration. D'après l'exemple précédent, l'ensemble des automorphismes de rang un contient l'odomètre, et contient donc sa classe de conjugaison qui est dense d'après le corollaire 5.12.

Il reste à voir que l'ensemble des automorphismes de rang un est un G_δ. On fixe une sous-algèbre $M_0 \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ dénombrable dense. Il est clair que $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ est de rang un ssi pour tout $\epsilon > 0$ et toute famille finie $(B_i)_{i=1}^k$ d'éléments de M_0,

$$\exists A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu), \exists A_1, ..., A_k \in M_{A,T}, \forall i \in \{1, ..., k\}, \mu(A_i \bigtriangleup B_i) < \epsilon.$$

Mais ceci est équivalent à : pour tout $\epsilon > 0$, toute famille finie $(B_i)_{i=1}^k$ d'éléments de M_0 et tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tels que, pour tout $n, m \in \{0, ..., N-1\}$, $n \neq m$ implique $\mu(T^n(A) \cap T^m(A)) < \frac{\epsilon}{N^3}$, et il existe $F_1, ..., F_k$ sous-ensembles finis de $\{0, ..., N-1\}$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., k\}$,

$$\mu(\bigcup_{n \in F_i} T^n(A) \bigtriangleup B_i) < \epsilon.$$

En effet, à partir d'un $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ satisfaisant la condition précédente, si on pose

$$A' = A \setminus \bigcup_{n,m=0}^{N-1} T^{-n}(T^n(A) \cap T^m(A)),$$

on voit que $\mu(A \bigtriangleup A') < \frac{\epsilon}{N}$ et que la famille $(T^n(A'))_{n=0}^{N-1}$ est disjointe. Ceci implique que chaque $\bigcup_{n \in F_i} T^n(A)$ est ϵ-proche de $A_i = \bigsqcup_{n \in F_i} T^n(A')$, ainsi B_i est 2ϵ-proche de $A_i \in M_{A',T}$, d'où le résultat. □

3. Un élément de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est dit compact s'il induit une action compacte de $\mathbb{Z}$ (cf. le paragraphe suivant la définition 2.5).

Le théorème qui suit est dû à J. Baxter, on en admettra la preuve. On aurait pu le prendre pour définition, mais il n'est alors pas clair que les transformations de rang un forment un G_δ de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

Théorème 5.27 ([**Bax71**, lem. 9]). *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ de rang un. Alors il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ telle que les $M_{A_k,T}$ soient croissantes et de réunion dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$.*

Nous pouvons maintenant prouver le théorème principal de cette section, dont l'énoncé et la preuve sont tout à fait parallèles à ceux du théorème 4.15.

Théorème 5.28. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ un automorphisme de rang un, et soit $\mathcal{R}_T$ la relation d'équivalence engendrée par T. Alors il existe $U \in [\mathcal{R}_T]$ de support arbitrairement petit et tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

(I) Pour tout $N \geqslant 0$, le groupe plein de $\mathcal{R}_T$ est engendré topologiquement par T et U^{2^N}.

(II) Les orbites de U sont toutes finies, et le cardinal de chacune est une puissance de deux.

Remarque 5.29. L'odomètre étant de rang un, on voit que le théorème précédent et le théorème 4.15 se recoupent dans le cas où T est l'odomètre. Cependant, le théorème 4.15 est valable également pour les “odomètres non ergodiques”, tandis que le théorème précédent traite uniquement d'automorphismes ergodiques puisque de rang un.

Démonstration du théorème 5.28. Comme dans la preuve du théorème 4.15, on va construire un $U \in [\mathcal{R}_T]$ qui vérifiera la condition (I) pour $N = 0$ ainsi que la condition (II), et on verra qu'il vérifie également la condition (I) pour tout $N \geqslant 1$.

Comme T est de rang un, le théorème 5.27 nous fournit une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tels que la réunion croissante des $M_{A_k,T}$ soit dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$. On note N_k le plus grand entier tel que les ensembles $A_k, T(A_k), ..., T^{N_k-1}(A_k)$ soient disjoints.

Définition 5.30. Soit $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ tel que A et $T(A)$ soient disjoints. On note $U_{T,A}$ l'involution définie par

$$U_{T,A}(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in A \\ T^{-1}(x) & \text{si } x \in T(A) \\ x & \text{si } x \in X \setminus (A \cup T(A)). \end{cases}$$

La relation d'équivalence $\mathcal{R}_T$ est engendrée par les $\mathcal{R}_{\restriction A\sqcup T(A)}$, et le groupe plein de chaque $\mathcal{R}_{\restriction A\sqcup T(A)}$ est égal à l'ensemble des $U_{T,B}$ pour $B \subseteq A$. Ainsi d'après le théorème 4.3, le groupe plein de $\mathcal{R}_T$ est topologiquement engendré par les involutions $U_{T,A}$, où $A \subseteq X$ est tel que A et $T(A)$ soient disjoints[4].

Lemme 5.31. *Le groupe plein de $\mathcal{R}_T$ est topologiquement engendré par les $U_{T,A}$, où $A \in M_{A_k,T}$ est tel que A et $T(A)$ soient disjoints et $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Si $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $\epsilon > 0$, on dispose de $k \in \mathbb{N}$ et de $A' \in M_{A_k,T}$ qui soit $\epsilon\mu(A)$-proche de A. Quitte à prendre k suffisamment grand, on peut supposer que A' s'écrit comme réunion pour $i \in F$ de $T^i(A_k)$, où $F \subseteq \{0, ..., N_k - 2\}$. On note q le cardinal de F. Soit F' l'ensemble des $i \in F$ tels que $T^{i+1}(A_k)$ ne soit pas disjoint de A'. On note p la cardinalité de F'. On pose alors $A'' = \bigsqcup_{i\in F\setminus F'} T^i(A)$, par construction $T(A'')$ est disjoint de A'', et il s'agit de voir que $U_{T,A''}$ est proche de $U_{T,A}$.

4. Le fait que $[\mathcal{R}_T]$ soit topologiquement engendré par les $U_{T,A}$ découle aussi directement de la preuve du théorème 4.3.

Soit $\delta = \mu(A_k)$, par définition de F' on a $\mu(A' \cap T(A')) \geqslant p\delta$. Comme A' est $\epsilon\mu(A)$-proche de A, et comme A est disjoint de $T(A)$, on a $p\delta \leqslant 2\epsilon\mu(A)$. Soit maintenant q le nombre d'éléments de F, on a $\mu(A') = q\delta$ donc $q\delta \geqslant \mu(A)(1-\epsilon)$. Ainsi

$$\frac{p}{q} < \frac{2\epsilon}{1-\epsilon},$$

ce qui nous donne $\mu(A' \triangle A'') \leqslant \frac{4\epsilon}{1-\epsilon}$ et donc $\mu(A \triangle A'') \leqslant \epsilon + \frac{4\epsilon}{1-\epsilon}$. Ainsi

$$d_u(U_{T,A}, U_{T,A''}) \leqslant 2\left(\epsilon + \frac{4\epsilon}{1-\epsilon}\right) \qquad \dashv$$

Lemme 5.32. *Fixons $k \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble des $U_{T,A}$, où $A \in M_{A_k,T}$ est tel que A et $T(A)$ soient disjoints, est contenu dans le groupe engendré par T et U_{T,A_k}.*

Démonstration. En conjuguant U_{T,A_k} par des puissances de T, on obtient tous les $U_{T,T^i(A_k)}$ pour $i \in \{0, ..., N_k - 2\}$, et il est clair que tout $U_{T,A}$ pour $A \in M_{A_k,T}$ s'écrit comme produit de $U_{T,T^i(A_k)}$. $\dashv$

Comme à k fixé, l'ensemble des $U_{T,A}$ pour $A \in M_{A_k,T}$ est fini, on dispose d'une borne uniforme $\kappa(k)$ sur la longueur minimale du mot en T et U_{T,A_k} auquel chaque $U_{T,A}$ est égal pour $A \in M_{A_k,T}$.

Soit alors (ϵ_n) une suite arbitraire de réels positifs tendant vers 0. Comme N_k tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, on peut construire par récurrence une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{N_{k_n}} < \frac{1}{3} \tag{5.1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{N_{k_{n+m}}} < \frac{\epsilon_n}{\kappa(N_{k_n})} \tag{5.2}$$

La propriété (5.1) nous permet de construire par récurrence une suite (i_n) d'indices tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^{i_n}(A_{k_n}) \sqcup T^{1+i_n}(A_{k_n})$ soit disjoint de $\bigsqcup_{m<n} (T^{i_m}(A_{k_m}) \sqcup T^{1+i_m}(A_{k_m}))$.

On choisit alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un élément $\sqrt[2^n]{U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}} \in [\mathcal{R}_T]$ de même support que $U_{T,T^{i_n}(A_{i_n})}$ et tel que $\left(\sqrt[2^n]{U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}}\right)^{2^n} = U_{T,T^{i_n}(A_{i_n})}$. On définit enfin le produit infini commutatif

$$U = \prod_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[2^n]{U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}}.$$

En utilisant la condition (5.2) et le fait que chaque $U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}$ soit une involution, le même calcul que pour le cas de l'odomètre (cf. la preuve du théorème 4.15) nous donne que U^{2^n} est $\frac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}$ proche de $U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}$. En conjuguant par T^{i_n}, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe engendré par T et U contient $U_{T,A_{k_n}}$ à $\frac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}$ près.

Fixons maintenant $K \in \mathbb{N}$ et $A \in M_{A_K,T}$ tel que $T(A)$ et A soient disjoints. Alors si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $k_n \geqslant K$, on a $A_K \in M_{A_{k_n},T}$. Ainsi, d'après la définition de $\kappa(k_n)$ et le fait que le groupe engendré par T et U contienne $T_{A_{k_n}}$ à $\frac{\epsilon_n}{\kappa(k_n)}$ près, le groupe engendré par T et U contient T_A à ϵ_n près. Comme $\epsilon_n \to 0$, l'adhérence du groupe engendré par T et U contient $U_{T,A}$, ce qui achève la preuve du cas $N = 0$ par le lemme 5.31.

La preuve du fait que la condition (I) soit satisfaite pour $N \geqslant 1$ est la même que pour le théorème 4.15 : on pose $U' = U^{2^N}$ et on observe que

$$U' = \prod_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[2^n]{U_{T,T^{i_{N+n}}(A_{k_{N+n}})}}.$$

Avec le même calcul que pour U, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${U'}^{2^n}$ est $\frac{\epsilon_{n+N}}{\kappa(k_{n+N})}$ proche de $U_{T,T^{i_{n+N}}(A_{k_{n+N}})}$, et donc en conjuguant par T on obtient que le groupe engendré par T et U' contient $U_{T,A_{k_{n+N}}}$ à $\frac{\epsilon_{n+N}}{\kappa(k_{n+N})}$ près. Par définition de κ, le groupe engendré par T et U' contient alors à ϵ_{n+N} près chaque $U_{T,A}$ pour $A \in M_{A_{k_{n+N}}}$, et comme $\epsilon_{n+N} \to 0[n \to \infty]$, on en déduit par le lemme 5.31 que le groupe fermé engendré par T et U' est égal au groupe plein de $\mathcal{R}_T$.

Enfin, la construction de U fait que la condition (II) est bien satisfaite, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, les orbites non réduites à un point de $\sqrt[2^n]{U_{T,T^{i_n}(A_{k_n})}}$ sont de cardinal 2^{n+1}. $\square$

Le théorème que nous venons de prouver étant une généralisation au rang un de ce que l'on avait obtenu pour l'odomètre (théorème 4.15), on en déduit un corollaire en tout point similaire au théorème 5.13. La preuve en est identique.

Corollaire 5.33. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ de rang un, et soit $\mathcal{R}_T$ la relation d'équivalence p.m.p. qu'il engendre. Alors l'ensemble des $U \in [\mathcal{R}_T]$ tels que $\overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}_T]$ est un G_δ dense.*

Question. *Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, et soit $\mathcal{R}_T$ la relation d'équivalence engendrée par T. Existe-t-il $U \in [\mathcal{R}_T]$ tel que $\overline{\langle T, U\rangle} = [\mathcal{R}_T]$? Si oui, l'ensemble de tels U est-il dense ?*

Le corollaire précédent répond affirmativement à cette question dans le cas où $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est de rang un, ainsi cette question admet une réponse positive sur un G_δ dense de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ d'après le lemme 5.26. Cependant, les techniques utilisées ne semblent pas pouvoir s'adapter à des exemples éloignés du rang un, comme par exemple les décalages de Bernoulli.

Annexe A

Algèbres de mesure

Le but de ce chapitre est de présenter la théorie de base des algèbres de mesure *séparables* puisque ces dernières forment le cadre de la majorité de cette thèse. On en profite pour démontrer d'une manière inédite, à l'aide des algèbres de mesure, une forme faible de l'unicité des espaces de probabilité standards qui est tout à fait suffisante pour les besoins de la théorie ergodique (corollaire A.16). L'avantage de cette méthode est de ne pas s'appuyer sur l'unicité des espaces boréliens standards, qui est un fait non trivial de théorie descriptive des ensembles (cf. [**Kec95**, chap. 15]).

Les algèbres de mesure sont tout d'abord des algèbres booléennes, dont la définition la plus concise est la suivante.

Définition A.1. Une algèbre booléenne est un anneau unifère $(\mathfrak{A}, \triangle, \wedge, 0_A, 1_A)$ dont tout élément est égal à son carré.

L'exemple à avoir en tête est celui de l'algèbre des parties d'un ensemble X : celle-ci est naturellement une algèbre booléenne pour les opérations de différence symétrique et d'intersection. On peut tout aussi bien obtenir cette structure d'algèbre booléenne en identifiant l'ensemble des parties de X à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^X$ muni de la structure d'anneau unifère produit. Notons également que dans une algèbre booléenne, tout élément est égal à son opposé.

Soit une algèbre booléenne $(\mathfrak{A}, \triangle, \wedge, 0_A, 1_A)$. On définit un ordre $\leqslant$ sur $\mathfrak{A}$ par $a \leqslant b$ ssi $a \wedge b = a$. Alors 0_A est le plus petit élément, et 1_A le plus grand. On remarque ensuite que $a \wedge b$ est l'infimum de $\{a, b\}$, ce qui justifie la notation utilisée. Pour $a \in A$, notons $\neg a = 1_A \triangle a$. On vérifie que l'involution $a \mapsto \neg a$ renverse l'ordre, ainsi le supremum $a \vee b$ de $\{a, b\}$ est également bien défini, et vaut $a \vee b = 1_A \triangle ((1_A \triangle a) \wedge (1_A \triangle b)) = (a \triangle b) \triangle (a \wedge b)$. Remarquons que dans le cas où A est l'ensemble des parties de X, $\vee$ est l'union, $\wedge$ est l'intersection, et $\neg$ est le passage au complémentaire. Comme cette structure supplémentaire est fort pratique, on l'inclura dans les notations en écrivant systématiquement les algèbre booléennes sous la forme $(\mathfrak{A}, \triangle, \wedge, \vee, \leqslant, \neg, 0_A, 1_A)$.

Définition A.2. Une **algèbre de mesure** est une algèbre booléenne $(\mathfrak{A}, \triangle, \wedge, \vee, \leqslant, \neg, 0_A, 1_A)$ munie d'une application $\mu : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ telle que :

(i) $\mu(1_A) = 1$,

(ii) $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ dès lors que a et b sont disjoints, i.e. dès lors que $a \wedge b = 0_A$,

(iii) $d_\mu(a, b) = \mu(a \triangle b)$ définit une distance *complète* et *séparable* sur $\mathfrak{A}$.

Définition A.3. Soit (X, τ) un espace polonais, on note $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre de ses boréliens, que l'on munit d'une mesure de probabilité μ. Alors, on dit que (X, μ) est un **espace de probabilité standard**.

Proposition A.4. *Soit (X, μ) un espace de probabilité standard. Alors l'algèbre des boréliens de X quotientée par l'idéal des ensembles de mesure nulle et munie de la mesure μ est une algèbre de mesure, notée* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$.

DÉMONSTRATION. Le seul point non trivial à vérifier dans la définition A.2 est (iii).

Commençons par la complétude : soit (a_n) une suite de Cauchy pour d_μ, que l'on relève en une suite (A_n) de parties boréliennes de X. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n \triangle A_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$. Soit alors

$$A = \limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geqslant n} A_m,$$

on va montrer que si a est l'élément de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ correspondant, alors $a_n \to a$. Soit donc $n_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mu(A_{n_0} \triangle A) &= \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}}\left(A_{n_0} \triangle \left(\bigcup_{m \geqslant n} A_m\right)\right)\right)\\ &= \lim_{n \to +\infty} \mu\left(A_{n_0} \triangle \left(\bigcup_{m \geqslant n} A_m\right)\right)\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n \geqslant n_0$, on a $\bigcup_{m > n} A_m \subseteq \bigcup_{m \geqslant n_0} A_m$. Mais on a $\bigcup_{m \geqslant n_0} A_m = A_{n_0} \sqcup \bigsqcup_{m \geqslant n_0} A_{m+1} \setminus \left(\bigcup_{k \leqslant m} A_k\right)$, et comme pour tout $m \in \mathbb{N}$ $\mu(A_m \triangle A_{m+1}) < \frac{1}{2^m}$, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mu\left(A_{n_0} \triangle \left(\bigcup_{m \geqslant n} A_m\right)\right) \leqslant \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0 - 1}}.$$

On a donc bien $\lim_{n_0 \to +\infty} \mu(a_{m_0} \triangle a) = 0$, ce qui établit la complétude de $(\mathrm{MAlg}(X, \mu), d_\mu)$.

Reste à établir la séparabilité. Comme X est polonais, la mesure μ est régulière, et donc l'ensemble des classes d'équivalence d'ouverts est dense dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Maintenant, le fait que X ait une base dénombrable d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous assure que tout ouvert s'écrit comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$, et donc que sa classe est d_μ approchée par des réunions finies de classes d'éléments de $\mathcal{U}$. Ces dernières formant un ensemble dénombrable, on déduit que $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est séparable. $\square$

En tant qu'algèbre booléenne, $\mathfrak{A}$ est munie d'un ordre $\leqslant$ où toute famille finie possède un supremum ainsi qu'un infimum. Une de nos premières tâches va être de constater que ce fait reste vrai pour des familles arbitraires d'éléments de $\mathfrak{A}$.

LEMME A.5. *Soit $\mathcal{F}$ une famille dirigée d'éléments d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$ (i.e. pour tous $a, b \in \mathcal{F}$, il existe $c \in \mathcal{F}$ tel que $c \geqslant a$ et $c \geqslant b$). Alors $\mathcal{F}$ admet un supremum qui s'obtient comme limite d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\tau = \sup_{a \in \mathcal{F}} \mu(a)$. On dispose d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ dont la mesure converge vers τ. Comme $\mathcal{F}$ est dirigée, on peut choisir par récurrence $b_n \in \mathcal{F}$ plus grand que a_n et b_{n-1}, et ainsi obtenir une suite croissante $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ dont la mesure tend vers τ. Montrons qu'une telle suite est de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mu(b_n) \geqslant \tau - \epsilon$. Soient alors $n, m \geqslant N$, comme $b_n \vee b_m$ est dominé par un élément de $\mathcal{F}$, on a $\mu(b_n \vee b_m) \leqslant \tau$. On obtient donc

$$\mu(b_n) + \mu(b_m) - \mu(b_n \wedge b_m) \leqslant \tau,$$

et ainsi $\mu(b_n \wedge b_m) \geqslant \tau - 2\epsilon$. Au final, on a $d_\mu(b_n, b_m) \leqslant 4\epsilon$, et on a donc montré que (b_n) est de Cauchy. Sa limite est le supremum de $\mathcal{F}$. $\square$

Proposition A.6. *Soit $\mathcal{F}$ une famille quelconque d'éléments d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$. Alors cette famille possède un supremum, obtenu comme limite croissante d'unions finies d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ la famille des réunions finies d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{G}$ est une famille dirigée d'éléments de $\mathfrak{A}$, qui par le lemme précédent admet un supremum obtenu comme limite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$. Ce supremum est également le supremum de $\mathcal{F}$. □

Étant donnée une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$, on notera son supremum $\bigvee_{i\in I} a_i$. Par passage au complémentaire, on dispose également de l'infimum d'une famille arbitraire d'éléments $(a_i)_{i\in I}$, noté $\bigwedge_{i\in I} a_i$, qui est obtenu comme limite d'intersections finies.

Proposition A.7. *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$, stable par supremum dénombrable. Alors $\mathcal{F}$ admet un maximum.*

Démonstration. D'après le lemme A.5, le supremum de $\mathcal{F}$ est obtenu comme limite croissante d'unions finies d'éléments de $\mathcal{F}$, autrement dit, $\sup \mathcal{F} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$. Mais la croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$ qui appartient à $\mathcal{F}$ par hypothèse. □

Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$. Comme la famille $\mathcal{G} = (\bigvee_{i=0}^n a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est dirigée, elle admet par le lemme A.5 un supremum obtenu comme limite croissante de ses éléments. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigvee_{i=0}^n a_i \leqslant \bigvee_{i=0}^{n+1} a_i$, donc le supremum de $\mathcal{G}$ est également la limite de la suite $(\bigvee_{i=0}^n a_i)_{n\in\mathbb{N}}$, autrement dit

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} \bigvee_{i=0}^n a_i.$$

Comme μ est finiment additive et continue, on en déduit la proposition suivante.

Proposition A.8. *La mesure μ est σ-additive, i.e. pour toute famille dénombrable $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $a_n \wedge a_m = 0$ pour tout $n \neq m$, on a*

$$\mu(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n).$$

Définition A.9. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de mesure, un **atome** de $\mathfrak{A}$ est un élément $a \in \mathfrak{A}$ tel que pour tout $b \leqslant a$, $b = 0$ ou $b = a$.

Étant donné un élément a d'une algèbre de mesure $\mathfrak{A}$, on pose $\mathfrak{A}_a = \{b \in \mathfrak{A} : b \leqslant a\}$. Alors, muni de la mesure normalisée $\frac{\mu}{\mu(a)}$, $\mathfrak{A}$ est également une algèbre de mesure, et on remarque qu'elle est sans atome si $\mathfrak{A}$ l'est.

Proposition A.10. *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de mesure sans atome. Alors pour tout $t \in [0,1]$, il existe $a \in \mathfrak{A}$ de mesure t.*

Démonstration. Soit $\tau = \sup_{\mu(a)\leqslant\frac{1}{2}} \mu(a)$. Montrons tout d'abord que $\tau > \frac{1}{4}$. Dans le cas contraire, soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $\mu(a_n) \to \tau$. Alors pour tous m, n, on a $\mu(a_n \vee a_m) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui implique $\mu(a_n \vee a_m) \leqslant \tau = \sup_k \mu(a_k)$, et donc par un argument déjà évoqué la suite (a_n) est de Cauchy. Soit $a \in \mathfrak{A}$ sa limite. Alors $\neg a$ doit contenir un élément b non nul de mesure plus petite que $\frac{1}{2}\mu(\neg a)$, car sinon $\neg a$ est un atome. Mais alors la mesure de $a \vee b$ est strictement comprise entre $1/4$ et $3/4$, ce qui contredit le fait que $\tau \leqslant \frac{1}{4}$.

On a donc $\tau > \frac{1}{4}$, ce qui fournit $a \in \mathfrak{A}$ tel que $\frac{1}{4} \leqslant \mu(a) \leqslant \frac{1}{2}$. Un tel a engendre une algèbre finie $\mathfrak{A}_1 = \{0, a, \neg a, 1\}$ donc le plus grand atome a une mesure plus petite que $\frac{3}{4}$. On peut alors appliquer l'argument précédent aux atomes de cette algèbre, et par induction construire une suite d'algèbres de mesure finies $\mathfrak{A}_n$ dont le plus grand atome est de mesure plus petite que $(\frac{3}{4})^n$. On peut alors, étant donné $t \in [0,1]$, obtenir une suite croissante d'éléments $a_n \in M_n$ de mesure inférieure ou égale à t dont la limite sera de mesure t. $\square$

REMARQUE A.11. Si $\mathfrak{A}$ est sans atomes, on sait que pour tout $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_a$ est également sans atomes, et on déduit de la proposition précédente l'existence pour tout $0 \leqslant t \leqslant \mu(a)$ de $b \leqslant a$ tel que $\mu(b) = t$.

La preuve du théorème suivant utilise un argument de va-et-vient : on construit une isométrie par récurrence, en s'assurant à la fois que son image et son domaine sont denses.

THÉORÈME A.12. *Il existe une unique algèbre de mesure sans atomes.*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux algèbres de mesure sans atome, on dispose de (a_n) et (b_n) denses dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ respectivement. Construisons par récurrence une suite d'isomorphismes φ_n entre sous-algèbres finies telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \operatorname{dom} \varphi_n$ et $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq \operatorname{img}(\varphi_n)$.

On commence par φ_0 l'unique isomorphisme entre $\{0_A, 1_A\}$ et $\{0_B, 1_B\}$. Ensuite, φ_n étant construite, soient $c_1, ..., c_p$ les atomes de son domaine, et soient $d_1, ..., d_p$ leurs images par φ_n. Soit $k \in \{1, ..., p\}$. On pose $t_k = \mu(a_{n+1} \cap c_k)$, alors d'après la remarque A.11, on dispose de $e_k \leqslant d_k$ de mesure t_k.

On peut alors étendre φ_n en un isomorphisme ψ_{n+1} dont le domaine est l'algèbre engendrée par $\{a_{n+1}\} \cup \operatorname{dom} \varphi_n$ en posant $\psi_{n+1}(a_{n+1} \wedge c_k) = e_k$ et $\psi_{n+1}(c_k - a_{n+1}) = d_k - e_k$. On applique maintenant le même argument pour étendre ψ_{n+1}^{-1} en un isomorphisme φ_{n+1}^{-1} dont le domaine contient b_{n+1}. En particulier, φ_{n+1} étend φ_n en un isomorphisme entre deux sous-algèbres finies, l'une contenant a_{n+1} et l'autre contenant b_{n+1}.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$ est alors un isomorphisme entre deux sous-algèbres denses de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ qui préserve la mesure. En particulier, c'est une isométrie, et donc $\bigcup \varphi_n$ s'étend de manière unique en une isométrie entre ces deux espaces métriques complets. Par continuité des opérations sur une algèbre de mesure, cette extension est un isomorphisme d'algèbres de mesure. $\square$

COROLLAIRE A.13. *Soit M une algèbre de mesure. Alors M est isomorphe à l'algèbre de mesure d'un espace de probabilité standard, avec d'éventuels atomes.*

Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces de probabilité standard. Toute application borélienne $\varphi : (X, \mu) \to (Y, \nu)$ préservant la mesure induit un morphisme $\varphi^{-1} : \mathrm{MAlg}(Y, \nu) \to \mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Le théorème suivant établit une réciproque.

THÉORÈME A.14. *Tout morphisme d'algèbres de mesure $\Phi : \mathrm{MAlg}(Y, \nu) \to \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ se relève en une application borélienne préservant la mesure $\varphi : (X, \mu) \to (Y, \nu)$. De plus, un tel relevé est unique à mesure nulle près.*

DÉMONSTRATION. Soit τ une topologie polonaise compatible avec la structure borélienne de Y, et soit d_Y une distance complète compatible avec cette topologie. Quitte à remplacer d_Y par $\frac{d_Y}{1+d_Y}$, on peut supposer d_Y bornée. Soit alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, Y)$ l'ensemble des applications boréliennes de X dans Y identifiées à mesure nulle près. On le munit de la distance L^∞ suivante, définie par $d_\infty(f, g) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ pour $f, g : X \to Y$. On vérifie alors que cette distance est complète.

Soit (A_n) une suite de représentants d'une suite dense dans $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$. Par séparabilité de Y, on peut trouver une suite croissante $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-algèbres dénombrables atomiques de $\mathfrak{B}(Y)$, dont chaque atome est de diamètre au plus $\frac{1}{2^n}$, et telle que pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque atome A de $\mathcal{P}_n$, on choisit $y_A \in A$. On définit alors une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathrm{L}^0(X, \mu, Y)$ par $\varphi_n(x) = y_A$ ssi $x \in \Phi(A)$. Comme les $\mathcal{P}_n$ sont croissants et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diamètre d'un élément de $\mathcal{P}_n$ est au plus $\frac{1}{2^n}$, la suite (φ_n) est une suite de Cauchy pour la distance d_∞. Soit φ sa limite. Par densité de $([A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$, φ relève bien Φ. Et si ψ est un autre relevé, on remarque que l'on doit toujours avoir $\varphi_n \to \psi$, donc $\psi = \varphi$ presque partout par unicité de la limite. □

Corollaire A.15. *Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces de probabilité standards. Alors pour tout isomorphisme $T : \mathrm{MAlg}(X, \mu) \to \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$, il existe une application p.m.p. $\tilde{T} : X \to Y$ et deux boréliens A et B de mesure pleine dans X et Y respectivement, en restrictions desquels $\tilde{T}$ est une bijection. De plus, un tel $\tilde{T}$ est unique à mesure nulle près.*

Démonstration. Par le théorème précédent appliqué à T^{-1} puis à T, on dispose de deux applications $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to X$ préservant la mesure relevant respectivement T^{-1} et T. Par unicité, comme $T^{-1}T = \mathrm{id}_{\mathrm{MAlg}(X,\mu)}$ et $TT^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{MAlg}(Y,\nu)}$, on dispose d'un borélien $A \subseteq X$ de mesure pleine tel que $\varphi \circ \psi_{\restriction A} = \mathrm{id}_A$, et d'un borélien $B \subseteq Y$ de mesure pleine tel que $\psi \circ \varphi_{\restriction B} = \mathrm{id}_B$. Alors φ induit une bijection entre $A \cap \varphi^{-1}(B)$ et $B \cap \psi^{-1}(A)$, et donc $\tilde{T} = \varphi$ vérifie les propriétés annoncées. L'unicité à mesure nulle près de $\tilde{T}$ est une conséquence immédiate du théorème précédent. □

Corollaire A.16. *Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces de probabilité standards sans atomes. Alors il existe deux boréliens de mesure pleine $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ et une application borélienne p.m.p. $\varphi : X \to Y$ qui, en restriction à A, est une bijection de A vers B.*

Démonstration. On a vu que les espaces de probabilité standards sans atomes induisent une algèbre de mesure sans atomes, et que deux telles algèbres de mesures sont toujours isomorphes (théorème A.12). Soit donc T un isomorphisme entre $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ et $\mathrm{MAlg}(Y, \nu)$, alors le corollaire précédent nous fournit un relevé $\tilde{T}$ de T qui est bien une bijection entre deux sous-ensembles de mesure pleine. □

Remarque A.17. Une version plus forte du corollaire A.16 est vraie : on peut en fait obtenir une bijection borélienne p.m.p. entre X et Y tout entiers. Pour cela, on doit notamment utiliser le fait que tous les boréliens standards non dénombrables sont isomorphes [**Kec95**, thm. 15.6].

Le lemme qui suit est fondamental pour pouvoir prouver que l'équivalence des définitions de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ que l'on donnera dans l'annexe B.

Lemme A.18. *Soit (X, μ) un espace de probabilité standard et T une bijection borélienne p.m.p. entre deux ensembles de mesures pleine de X. Alors il existe $\tilde{T}$ une bijection borélienne p.m.p. de X tout entier telle que $T = \tilde{T}$ μ-presque partout.*

Démonstration. Soit A le domaine de φ, alors $B = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n(A)$ est inclus dans A, stable par T, et de mesure pleine car A est de mesure pleine et T préserve la mesure. On pose alors

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } x \in B, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$ □

Proposition A.19. *Soit T un automorphisme de* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$. *Alors on peut relever T en un automorphisme borélien $\tilde{T} : X \to X$ qui préserve la mesure μ. De plus, un tel relevé est unique à mesure nulle près.*

Démonstration. D'après le corollaire A.16, on peut relever un élément de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ en une bijection borélienne p.m.p. T' entre deux ensembles de mesure pleine. Le lemme précédent permet alors d'étendre T' en une bijection borélienne p.m.p. $\tilde{T}$ de (X, μ). L'unicité de $\tilde{T}$ à mesure nulle près est une conséquence directe de l'unicité à mesure nulle près des relevés de morphismes d'algèbres de mesure (théorème A.14). $\square$

Annexe B

Le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$

Fixons un espace de probabilité standard (X, μ). On a vu dans la proposition A.19 que tout automorphisme de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ se relève en une bijection borélienne p.m.p. de (X, μ) unique à mesure nulle près. Cela nous permet de donner deux définitions équivalentes de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Définition B.1. Le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est le groupe des automorphismes de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$.

Soit $T : X \to X$ une bijection borélienne préservant la mesure μ. Le **support** de T est l'ensemble

$$\operatorname{supp} T = \{x \in X : T(x) \neq x\}.$$

On note $\mathrm{Bij}_\mu(X)$ le groupe des bijections boréliennes p.m.p., alors on a un morphisme naturel $\mathrm{Bij}_\mu(X) \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$ donné par l'action des bijection boréliennes p.m.p. sur l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Le corollaire A.19 nous dit alors d'une part que ce morphisme est surjectif, et d'autre part que son noyau est le groupe formé des éléments dont le support est de mesure nulle. Une définition équivalente de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est donc la suivante.

Définition B.2. Le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est le quotient du groupe des bijections boréliennes p.m.p. de (X, μ) par le sous-groupe distingué formé des éléments dont le support est de mesure nulle.

Enfin, le lemme A.18 nous permet de donner une troisième définition de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Définition B.3. Le groupe $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est le quotient du groupe des bijections boréliennes p.m.p. entre des sous-ensembles de mesure pleine de (X, μ) par le sous-groupe distingué formé des éléments dont le support est de mesure nulle.

On rappelle que l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est munie d'une distance $d_\mu(a, b) = \mu(a \bigtriangleup b)$, ce qui permet de voir tout élément de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ comme une isométrie de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$. Mais le groupe des isométries d'un espace polonais est toujours un groupe polonais pour la topologie de la convergence simple[1], et $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de $(\mathrm{MAlg}(X, \mu), d_\mu)$ puisque les opérations de l'algèbre de mesure sont continues. Ainsi, $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est un groupe polonais pour la topologie de convergence simple, appellée aussi **topologie faible**. Plus explicitement, cette topologie est la topologie la plus grossière rendant pour tout $a \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ l'application $T \mapsto T(a)$ continue. Une suite d'automorphismes T_n converge donc faiblement vers $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ssi pour tout $a \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$,

$$\mu(T_n(a) \bigtriangleup T(a)) \to 0.$$

Le lemme qui suit précise davantage le lien entre bijections boréliennes p.m.p. et automorphismes de l'algèbre de mesure. Si T est une bijection borélienne p.m.p. de (X, μ), on notera $\bar{T}$ l'automorphisme de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ correspondant.

1. Le lecteur qui n'est pas familier avec les groupes polonais pourra consulter le chapitre 2 de [**Gao09**], et en particulier l'exercice 2.2.3.

Lemme B.4. *Soit T une bijection borélienne p.m.p. de (X,μ). Alors son support, vu comme élément de* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *peut se définir purement en termes de l'action de T sur* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$*, via la formule*

$$\operatorname{supp} T = \neg \bigvee \{a \in \mathrm{MAlg}(X,\mu) : \forall b \leqslant a, \bar{T}(b) = b\}.$$

Démonstration. Soit la famille $\mathcal{F} = \{a \in \mathrm{MAlg}(X,\mu) : \forall b \leqslant a, \bar{T}(b) = b\}$. La première remarque à faire est que le complémentaire du support de T, vu comme élément de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, appartient à $\mathcal{F}$, puisque T agit trivialement sur $X \setminus \operatorname{supp} T$.

Remarquons ensuite que la famille $\mathcal{F}$ est stable par supremum dénombrable car elle est clairement stable par supremum fini et c'est un fermé de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$[2]. Ainsi par le lemme A.7, la famille $\mathcal{F}$ admet un maximum que l'on note c. Il est clair que c est $\bar{T}$-invariant, soit maintenant C un relevé de c. Quitte à remplacer C par $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n(C)$, on peut supposer que C est T-invariant.

Mais alors, on peut relever $\bar{T}$ en un automorphisme T' défini par

$$T'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C, \\ T(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par unicité du relevé, le support de T doit être inclus dans le complémentaire de C, et ce à mesure nulle près. Mais on a déjà vu que le complémentaire du support de T est inclus dans C à mesure nulle près, d'où $\operatorname{supp} T = X \setminus C$ à mesure nulle près. □

Nous pouvons enfin définir la **distance uniforme** entre deux éléments S, T de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ par

$$d_u(S,T) = \mu(\operatorname{supp} S^{-1}T).$$

Proposition B.5. *La distance d_u est complète et biinvariante*[3]*, mais non séparable si* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *n'a pas d'atomes.*

Démonstration. La biinvariance de d_u est immédiate, pour la complétude, soit (T_n) une suite de Cauchy d'éléments de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Quitte à extraire, on peut supposer $d_u(T_n, T_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$. Soit alors, pour $n \in \mathbb{N}$, l'élément $a_n = \operatorname{supp}(T_n T_{n+1}^{-1})$. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n) < +\infty$, on a $\mu(\bigvee_{m\geqslant n} a_m) \to 0[n \to +\infty]$.

Soit alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \neg \bigvee_{m<n} a_m$, puis enfin $c_n = b_n \wedge \neg(\bigvee_{m<n} b_m)$. Alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de X, et on peut alors définir un automorphisme T de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ en posant pour tout $a \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$

$$T(a) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n(a \wedge c_n).$$

L'automorphisme T est alors la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque pour tout $m \geqslant n$, $T_{m\restriction c_n} = T_{n\restriction c_n}$.

Pour voir que d_u n'est pas séparable si (X,μ) est sans atomes, on peut par le corollaire A.16 supposer que $(X,\mu) = (\mathbb{S}^1, h)$ où h est la mesure de Haar. Comme l'action λ de $\mathbb{S}^1$ sur lui même par translation à gauche est libre et préserve h, on peut voir $\lambda(\mathbb{S}^1)$ comme un sous-ensemble discret de $(\mathrm{Aut}(\mathbb{S}^1, h), d_u) \simeq (\mathrm{Aut}(X,\mu), d_u)$ qui n'est donc pas séparable. □

Remarque B.6. Dans la preuve ci-dessus, la construction de la limite de Cauchy T est le prototype des constructions par “découpage et recollement” : on se donne une partition (c_n) de X et une suite (T_n) d'éléments de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que $(T_n(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit encore une

2. Un supremum dénombrable s'obtient toujours comme limite de supremums finis, cf. proposition A.6.

3. Par définition, une distance d sur un groupe G est dite biinvariante si pour tous $g, g', h, h' \in G$, on a $d(h,h') = d(ghg', gh'g')$.

partition de X. On définit alors un automorphisme T de MAlg(X, μ) en posant pour tout $a \in$ MAlg(X, μ)

$$T(a) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} T_n(a \wedge c_n).$$

Une telle construction est à la base de la définition des groupes pleins (cf. définition 1.1).

Annexe C

Espace des applications mesurables

Dans ce chapitre, fortement inspiré de [**Kec10**, sec. 19], nous associons à chaque groupe polonais G un groupe polonais contractile dans lequel il se plonge, noté $\mathrm{L}^0(X,\mu,G)$. Cette première motivation ne sera cependant pas la notre, puisqu'il s'agira avant tout de comprendre les groupes pleins de relations d'équivalence p.m.p. non ergodiques. Nous commençons par définir cette construction dans le cadre plus général des espaces métriques avant de revenir aux groupes polonais.

Soient (X,μ) un espace de probabilité standard, et (Z,d) un espace métrique dont la distance est bornée. Soit $\mathrm{L}^0(X,\mu,Z)$ l'espace des applications mesurables de X dans Z, identifiées à mesure nulle près. On le munit de la distance

$$d^1(f,g)=\int_X d(f(x),g(x))d\mu(x).$$

Notre première tâche est de comprendre la convergence au sens de cette distance.

Remarque C.1. Si (X,μ) est un espace de probabilité purement atomique, avec $n\in\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ atomes, alors $\mathrm{L}^0(X,\mu,Z)$ s'identifie naturellement à Z^n muni de la topologie produit.

Proposition C.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{L}^0(X,\mu,Z)$. Alors s'équivalent :*

(1) $d^1(f_n,f)\to 0$,

*(2) $f_n\to f$ **en mesure**, i.e. pour tout $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, la mesure de l'ensemble des $x\in X$ tels que $d(f_n(x),f(x))\geqslant\epsilon$ est plus petite que ϵ,*

(3) Toute sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge presque sûrement vers f.

Démonstration. Rappelons l'inégalité de Cébycev : pour tout $\epsilon>0$,

$$\epsilon\mu(\{x\in X : d(f_n(x),f(x))\geqslant\epsilon\})\leqslant\int_X d(f_n(x),f(x))d\mu(x).$$

On remarque alors que la condition (2) équivaut à : pour tout $\epsilon>0$, $\mu(\{x\in X : d(f_n(x),f(x))\geqslant\epsilon\}\to 0$, et l'inégalité de Cébycev permet de conclure que (1) $\Rightarrow$ (2).

Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3). Comme la condition (2) reste vérifiée quand on prend une sous-suite, il suffit de montrer que si $f_n\to f$ en mesure, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge presque sûrement vers f. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mu\left(\left\{x\in X : d(f_n(x),f(x))\geqslant\frac{1}{2^n}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Soit donc $A_n=\left\{x\in X : d(f_n(x),f(x))\geqslant\frac{1}{2^n}\right\}$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)<+\infty$ donc par le lemme de Borel-Cantelli, presque tout $x\in X$ n'appartient qu'à un nombre fini de A_n. Pour de tels x, on a par définition de A_n que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, d'où (3).

Enfin, montrons que (3) $\Rightarrow$ (1). Supposons que $d^1(f_n, f) \not\to 0$. Alors, quitte à prendre une sous-suite, on dispose de $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^1(f_n, f) \geqslant \epsilon$. Le théorème de convergence dominée (rappelons que d est bornée) empêche alors chaque sous-suite de converger vers f, d'où la négation de (3). $\square$

L'item (3) de la proposition précédente rend le corollaire suivant immédiat :

Corollaire C.3. *La topologie induite par d^1 sur $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ ne dépend que de la classe de μ et de la topologie induite par d sur Z.*

On se permettra donc de parler de $\mathrm{L}^0(X, \mu, G)$ en tant qu'espace topologique. La preuve de la proposition qui suit reprend les mêmes idées que celle de la proposition C.2.

Proposition C.4. *Supposons que (Z, d) soit complet. Alors $(\mathrm{L}^0(X, \mu, Z), d^1)$ est également complet.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour d^1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^1(f_n, f_{n+1}) \leqslant \frac{1}{4^n}$. Par l'inégalité de Cébycev pour $\epsilon = \frac{1}{2^n}$, on a alors :

$$\mu\left(\left\{x \in X : d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \geqslant \frac{1}{2^n}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

On pose alors $A_n = \left\{x \in X : d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \geqslant \frac{1}{2^n}\right\}$, l'inégalité précédente implique que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$ et donc par le lemme de Borel-Cantelli, presque tout $x \in X$ appartient à un nombre fini de A_n. Pour de tels x, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et converge donc vers un $f(x)$ par complétude de (Z, d). Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que $d^1(f_n, f) \to 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux questions de séparabilité. Comme (Z, d) se plonge isométriquement dans $(\mathrm{L}^0(X, \mu, Z), d^1)$, si Z n'est pas séparable, alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ ne l'est pas non plus. Réciproquement, on a la propositions qui suit.

Proposition C.5. *Supposons que (X, μ) soit un espace de probabilité standard et que (Z, d) soit séparable. Alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ est séparable. Plus précisément, si Z_0 est une partie dénombrable dense de Z et M_0 est une sous-algèbre dénombrable dense dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$, alors l'ensemble des applications M_0-mesurables à valeur dans un sous-ensemble fini de Z_0 est dense dans $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$.*

Démonstration. Les éléments de $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ à valeurs dans Z_0 sont denses pour la distance d_∞ définie par $d_\infty(f, g) = \sup^\mu_{x \in X} d(f(x), g(x))$. En particulier, ils sont denses pour d^1. De tels éléments sont limite presque sûre de fonctions à valeur dans un sous-ensemble fini de Z_0, donc par l'item (3) de la proposition C.2 les éléments de $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ à valeur dans un sous-ensemble fini de Z_0 sont denses. Maintenant, de tels éléments sont donnés par une partition finie de (X, μ) indexée par un sous-ensemble fini de Z_0, et on peut approcher une telle partition par une partition finie constituée d'éléments de M_0. Ces dernières étant en quantité dénombrable, la proposition est démontrée. $\square$

Corollaire C.6. *Soit Z un espace polonais et (X, μ) un espace de probabilité standard. Alors $\mathrm{L}^0(X, \mu, Z)$ est un espace polonais.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les deux propositions précédentes. $\square$

Pour finir, nous allons nous intéresser au cas où $Z = \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, où l'ordre naturel sur les réels induit un ordre partiel sur les fonctions mesurables : $f \leqslant g$ ssi pour presque tout $x \in X$, on a $f(x) \leqslant g(x)$. Commençons par donner une autre description de $\mathrm{L}^0(X,\mu,\bar{\mathbb{R}})$. Si $f \in \mathrm{L}^0(X,\mu,\mathbb{R})$, on remarque que f est entièrement déterminée par ses niveaux, i.e. par les $A_{q,f} = \{x \in X : f(x) < q\}$ où $q \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, on peut construire une fonction $f \in \mathrm{L}^0(X,\mu,\bar{\mathbb{R}})$ à partir une famille croissante d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ indexée par les rationnels $(a_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ satisfaisant la condition

(*) $\forall q \in \mathbb{Q}, a_q = \bigvee_{q'<q} a_{q'}$.

En effet, on peut tout d'abord choisit par récurrence pour $q \in \mathbb{Q}$ un représentant borélien A_q de la classe d'équivalence a_q, de telle sorte que les A_q soient croissants. Ensuite, on pose $f(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in A_q\}$. Alors, pour $q \in \mathbb{Q}$, si $x \in A_q$, on a $f(x) \leqslant q$. Mais comme $a_q = \bigvee_{q'<q} a_{r'}$, on dispose d'un ensemble de mesure pleine sur lequel on a en fait $x \in A_q \Rightarrow f(x) < q$. Réciproquement, la croissance des A_q donne que $f(x) < q$ implique $x \in A_q$. Au final, on dispose d'un ensemble de mesure pleine sur lequel pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(x) < q \Leftrightarrow x \in A_q$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition C.7. *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble dirigé d'éléments de $\mathrm{L}^0(X,\mu,\bar{\mathbb{R}})$, alors $\mathcal{F}$ admet un supremum $g \in \mathrm{L}^0(X,\mu,\bar{\mathbb{R}})$, qui est limite pour la convergence en mesure d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{Q}$, on considère, pour $f \in \mathcal{F}$, $A_{q,f} = \{x \in X : f(x) < q\}$. Alors $\{A_{q,f} : f \in \mathcal{F}\}$ est un ensemble dirigé d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, qui a donc un supremum B_q. Il est clair que $(B_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ satisfait la condition (3) du paragraphe précédent, autrement dit qu'elle définit un élément $g \in \mathrm{L}^0(X,\mu,\bar{\mathbb{R}})$ qui est bien le supremum des $f \in \mathcal{F}$.

Concernant la convergence en mesure, on identifie $\bar{\mathbb{R}}$ et $[0,1]$. On dispose alors, étant donné $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction $f_n \in \mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in \{0,...,2^n\}$,

$$\mu(A_{\frac{i}{2^n},g} \setminus A_{\frac{i}{2^n},g}) < \frac{1}{4^n},$$

d'où $\mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)|) > \frac{1}{2^n}\} < \frac{1}{2^n}$. Ainsi (f_n) converge en mesure vers g. □

Remarque C.8. Cette proposition implique l'existence de supremum pour des ensembles $\mathcal{F}$ arbitraires de fonctions, puisque l'on peut considérer $\tilde{F} = \{\max(f_1,...,f_n) : f_i \in \mathcal{F}\}$ qui est un ensemble dirigé de fonctions mesurables. Remarquons également que lorsque $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dénombrable, son supremum est la fonction $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

On va pour conclure faire une hypothèse plus forte sur $\mathcal{F}$ de manière à ce que son infimum aie une caractérisation agréable, ce qui nous sera utile pour comprendre le coût conditionnel des relations d'équivalence p.m.p. non ergodiques.

Proposition C.9. *Supposons que $\mathcal{F}$ soit une famille d'éléments de $\mathrm{L}^0(X,\mu,[0,+\infty])$ stable par découpage et recollement, i.e. pour toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}$ et toute partition (A_n) de X, la fonction f définie par $f_{\restriction A_n} = f_{n\restriction A_n}$ est un élément de $\mathcal{F}$. Alors la fonction $g = \inf \mathcal{F}$ est caractérisée par : pour toute fonction $\epsilon \in \mathrm{L}^0(X,\mu,]0,+\infty[)$, il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que $g + \epsilon \geqslant f \geqslant g$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'une telle famille $\mathcal{F}$ est bien dirigée : étant données $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, on peut considérer $a_1 = \{f_1 > f_2\}$ et $a_2 = \{f_1 \leqslant f_2\}$, et obtenir la fonction $f = \min(f_1, f_2)$ par recollement. Maintenant comme $\mathcal{F}$ est stable par découpage et recollement et la fonction ϵ est à valeur strictement positive, il suffit de montrer que pour tout δ réel strictement positif, on dispose de $f_\delta \in \mathcal{F}$ telle que $g + \delta \geqslant f_\delta$.

Soit donc $\delta \in \mathbb{R}^+_*$ et $a \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, par la proposition précédente on a une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge en mesure vers $g = \inf f$. De plus, comme $\mathcal{F}$ est dirigée on peut supposer la suite (f_n) décroissante. Soit $b_n = \{|f_n - f| < \delta\}$, on a $\mu(b_n) \to 1$ et donc $\mu(\bigvee b_n) = 1$. Il suffit alors de recoller les f_n selon les $a_n = b_n - (\bigvee_{m<n} b_m)$. □

Nous concluons ce chapitre avec un autre point de vue sur la topologie faible de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$. Il n'est pas clair que ce résultat était connu auparavant.

Définition C.10. Soit (X,τ) un espace polonais, muni d'une mesure de probabilité μ. On peut alors voir $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ comme un sous-ensemble de $\mathrm{L}^0(X,\mu,X)$; la topologie induite par la topologie de la convergence en mesure sur $\mathrm{L}^0(X,\mu,X)$ est appelée **topologie de la τ-convergence en mesure** sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

Théorème C.11. *Soit (X,τ) un espace polonais, muni d'une mesure de probabilité μ. Alors la topologie de la τ-convergence en mesure sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est la topologie faible.*

Démonstration. On fixe une distance complète d bornée compatible avec la topologie de X, rappelons que d'après la proposition C.2, la topologie de la convergence en mesure sur $\mathrm{L}^0(X,\mu,X)$ est induite par la distance $\tilde{d}$ définie par, pour $f,g\in\mathrm{L}^0(X,\mu,X)$

$$\tilde{d}(f,g)=\int_X d(f(x),g(x))d\mu(x).$$

Par changement de variable, la distance $\tilde{d}$ est invariante à droite sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, et donc $T_n\to T$ en mesure ssi $T_nT^{-1}\to\mathrm{id}_X$ en mesure. Et la topologie faible est une topologie de groupe sur $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, on a donc également que $T_n\to T$ faiblement ssi $T_nT^{-1}\to\mathrm{id}_X$ faiblement. Il suffit donc de montrer que T_n tend faiblement vers id_X ssi T_n tend en mesure vers id_X. Notons que, toujours d'après la proposition C.2, une base de voisinages de id_X pour la topologie de la τ-convergence en mesure est donnée par les

$$V_\epsilon=\{T\in\mathrm{Aut}(X,\mu):\mu(\{x\in X:d(T(x),x)>\epsilon\})<\epsilon\}.$$

Supposons donc que T_n tende faiblement vers l'identité, soit $\mathcal{P}$ une partition finie de $B\subseteq X$ en ensembles de diamètre plus petit que ϵ, où $\mu(B)>1-\epsilon$. Soit N le cardinal de $\mathcal{P}$, alors pour n assez grand et tout $A\in\mathcal{P}$, $\mu(T_n(A)\bigtriangleup A)<\frac{\epsilon}{N}$, et donc en mesure au plus ϵ/N éléments de A sortent de A. Comme le diamètre de A est au plus ϵ, on obtient qu'au plus ϵ/N éléments de A sont envoyés par T_n à une distance plus grande que ϵ d'eux-même, ce qui implique que $T_n\in V_{2\epsilon}$.

Réciproquement, soit T_n convergeant vers l'identité pour la topologie de la convergence en mesure. Par régularité de la mesure, il suffit de montrer que $\mu(T_n(A)\bigtriangleup A)\to 0$ pour tout A fermé de X. Mais on a $A=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}_+^*}(A)_r$ où $(A)_r$ est le r-voisinage de A, donc on trouve, $\epsilon>0$ étant donné, un $r>0$ tel que $\mu((A)_r\setminus A)<\epsilon$. On peut supposer également $r<\epsilon$, et alors pour n suffisament grand, on a que moins de ϵ points de A sont envoyés en dehors de $(A)_r$. Ainsi $\mu(A\setminus T_n(A))<2\epsilon$, donc $\mu(A\bigtriangleup T_n(A))<4\epsilon$. □

Corollaire C.12. *Soit G un groupe compact métrisable, et μ sa mesure de Haar. Alors le morphisme $G\to\mathrm{Aut}(G,\mu)$ obtenu via l'action de G sur lui-même par translation à gauche est un plongement de G dans $\mathrm{Aut}(G,\mu)$ muni de la topologie faible.*

Démonstration. On note $\tau:G\to\mathrm{Aut}(G,\mu)$ l'action de G sur lui même par translation à gauche. Soit alors d une distance bornée invariante à droite sur G compatible avec sa topologie. On note $\tilde{d}$ la distance sur $\mathrm{Aut}(G,\mu)$ définie par $\tilde{d}(T,U)=\int_G d(T(x),U(x))d\mu(x)$, qui induit la topologie de la convergence en mesure sur ce dernier. Alors pour tous $g,h\in G$,

$$\tilde{d}(\tau(g),\tau(h))=\int_G d(gx,hx)d\mu(x)=\int_G d(g,h)d\mu(x).$$

Ainsi τ est une isométrie de (G,d) dans $(\mathrm{Aut}(G,\mu),\tilde{d})$, en particulier c'est un plongement de G dans $\mathrm{Aut}(G,\mu)$. □

Annexe D

Sous-algèbres de mesure

Le corollaire A.13 établit une classification des algèbres de mesure. Nous allons maintenant nous intéresser aux sous-algèbres fermées d'une algèbre de mesure. On verra que de telles sous-algèbres proviennent essentiellement d'une décomposition de l'espace en produit, ce qui est un cas particulier d'un théorème dû à D. Maharam [**Mah50**]. De telles idées nous permettront également de donner une preuve simple du théorème de décomposition ergodique dans la section 3 du chapitre 2.

Soit donc M une algèbre de mesure, par le corollaire A.13 on peut supposer $M = \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ où (X,μ) est un espace de probabilité standard, avec d'éventuels atomes. Soit maintenant N une sous-algèbre fermée de M. C'est également une algèbre de mesure, et on a donc $N = \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ pour un espace de probabilité standard (Y,ν). L'inclusion $\iota : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \to \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ induit les plongements $\mathrm{L}^p(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(X,\mu)$. En effet, ι se relève en une application p.m.p. $\pi : (X,\mu) \to (Y,\nu)$ par le théorème A.14, et l'inclusion $\mathrm{L}^p(Y,\nu) \subseteq \mathrm{L}^p(X,\mu)$ se fait via $f \mapsto f\circ\pi$. En particulier, $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(X,\mu)$, et on dispose donc d'une projection $\mathbb{E}_N : \mathrm{L}^2(M) \to \mathrm{L}^2(N)$ appelée **espérance conditionnelle**. Elle est définie uniquement par la formule : pour tous $f \in \mathrm{L}^2(M)$ et $g \in \mathrm{L}^2(N)$,

$$\int_X fg = \int_X \mathbb{E}_N(f)g. \tag{D.1}$$

Lorsque $A \in M$, sa fonction caractéristique χ_A est un élément de $\mathrm{L}^2(M)$, et on définit la **mesure conditionnelle** de A comme l'espérance conditionnelle χ_A, soit

$$\mu_N(A) = \mathbb{E}_N(\chi_A).$$

Le théorème de désintégration permet de décrire cette mesure conditionnelle comme une fonction $y \mapsto \mu_y(A)$, où $(\mu_y)_{y\in Y}$ est une désintégration de μ. Notons également que ce dernier sera une conséquence facile des théorèmes de structure de sous-algèbres de mesure que nous allons établir.

Rappelons la terminologie déjà évoquée dans la section 4 du chapitre 1. L'inclusion $N \subseteq M$ est dite de type II si M ne contient pas d'atomes au dessus de N, i.e. il n'existe pas de $a \in M$ tel que tout $b \leqslant a$ s'écrive $c \wedge a$ pour un certain $c \in N$.

Rappelons également que M est sans atome ssi elle n'a pas d'atome au dessus de $N = \{0, X\}$. Ce qui suit est donc une généralisation proposition A.10.

Proposition D.1. *Soit $M = \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ une algèbre de mesure sans atomes, et soit $N = \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \subseteq M$ une sous-algèbre de type II. Alors pour tout $b \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et toute $f : Y \to [0,1]$ mesurable telle que $f \leqslant \mu_N(B)$, il existe $a \leqslant b$ dont la mesure conditionnelle par rapport à N est égale à f.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe $a \leqslant b$ dont la mesure conditionnelle par rapport à N est égale à $\mu_N(b)/2$. En effet à partir de là, on pourra construire par récurrence une suite décroissante (a_n) de sous-ensembles de b telle que $f - \frac{1}{2^n} \leqslant \mu_N(a_n) \leqslant f$, et ainsi la limite de cette suite répondra à la question.

On va alors adapter la preuve de la proposition A.10. La famille des $\mu_N(a)$ où $a \leqslant b$ et $\mu_N(a) \leqslant \frac{1}{2}\mu_N(b)$ est filtrante : si $a_1, a_2 \leqslant b$ sont tels que $\mu_N(a_i) \leqslant \mu_N(b)/2$, on considère

$c = \{\mu_N(a_1) \geqslant \mu_N(a_2)\}$, alors $(a_1 \wedge c) \vee (a_2 \wedge \neg c) \leqslant b$ est bien de mesure conditionnelle plus petite que $\frac{1}{2}\mu_N(b)$, et plus grande que $\mu_N(a_1)$ et $\mu_N(a_2)$. Soit donc $\tau : Y \to [0,1]$ le supremum de cette famille filtrante : on suppose que sur un ensemble de mesure positive, $\tau \leqslant \frac{1}{4}$. Alors, restreignant à un tel ensemble, la suite (a_n) est de Cauchy, soit a sa limite.

Soit alors $c \leqslant \neg a \wedge b$, et soit $d = \{y : 0 < \mu_N(c)(y) \leqslant \frac{1}{2}\mu_N(\neg a \wedge b)(y)\}$. Alors sur d, par définition de a, on doit avoir en fait $\mu_N(c)(y) \leqslant \mu_N(a) \leqslant \frac{1}{4}$, mais alors $a \vee (c \wedge d)$ est de mesure conditionnelle plus petite que $\frac{1}{2}$, mais strictement plus grand que a ce qui est contradictoire. Donc d est nul, de même en considérant le complémentaire de c dans $\neg a \wedge b$, on voit que $d' = \{y : \frac{1}{2}\mu_N(\neg a \wedge b)(y) \leqslant \mu_N(c)(y) < \mu_N(\neg a \wedge b)\}$ est nul. Ainsi pour tout $y \in Y$, on a en fait $\mu_N(c)(y)$ égal à 0 ou à $\mu_N(\neg a \wedge b)(y)$, et si on pose $d = \{y : \mu_N(c)(y) = \mu_N(\neg a \wedge b)(y)\}$, on a $c = d \wedge (a \wedge b)$. Ainsi, $\neg a \wedge b$ est un atome relatif de M au dessus de N, ce qui est impossible.

On a donc $\frac{1}{2}\mu_N(b) \geqslant \tau > \frac{1}{4}\mu_N(b)$. Ceci implique que l'on peut trouver $a \in M$ dont la mesure conditionnelle est comprise strictement entre $\frac{1}{4}\mu_N(b)$ et $\frac{3}{4}\mu_N(b)$. Par le même argument que la proposition A.10, on construit alors une suite convergente (a_n) dont la mesure conditionnelle convergera vers $\frac{1}{2}\mu_N(b)$. □

La proposition suivante va nous permettre de construire des isomorphismes d'algèbres de mesure au dessus d'une sous-algèbre commune.

Proposition D.2. *Soient* $\mathrm{MAlg}(X_1,\mu_1)$, $\mathrm{MAlg}(X_2,\mu_2)$ *deux algèbres de mesure. Soit* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ *une algèbre de mesure et soient* $\iota_1 : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(X_1,\mu_1)$ *et* $\iota_2 : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(X_2,\mu_2)$ *deux plongements. Enfin, soit* $\phi : \mathrm{MAlg}(X_1,\mu_1) \to \mathrm{MAlg}(X_2,\mu_2)$ *un isomorphisme d'algèbres de mesure. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{MAlg}(X_1,\mu_1) \arrow[rr, "\phi"] & & \mathrm{MAlg}(X_2,\mu_2) \\ & \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \arrow[ul, "\iota_1"] \arrow[ur, "\iota_2"'] & \end{tikzcd}$$

(2) L'isomorphisme ϕ préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, *c'est-à-dire que si pour $i \in \{1,2\}$ on note $\mu_{Y,i}$ la mesure conditionnelle associée au plongement ι_i :* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(X_i,\mu)$, *alors pour tout* $A \in \mathrm{MAlg}(X_1,\mu_1)$, $\mu_{Y,2}(\phi(A)) = \mu_{Y,1}(A)$.

Démonstration. (1)⇒(2) : Supposons que ϕ satisfasse (1). Le fait qu'on ait un diagramme commutatif au niveau des algèbres de mesures nous fournit un diagramme commutatif au niveau des espaces L^2 correspondants :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}^2(X_1,\mu_1) \arrow[rr, "\phi"] & & \mathrm{L}^2(X_2,\mu_2) \\ & \mathrm{L}^2(Y,\nu) \arrow[ul, "\iota_1"] \arrow[ur, "\iota_2"'] & \end{tikzcd} .$$

Or, la mesure conditionnelle de $A \in \mathrm{MAlg}(X_i,\mu_i)$ est définie comme la projection de sa fonction caractéristique sur $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$. Ainsi, le fait que le diagramme précédent commute implique que ϕ préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

(2)⇒(1) : Pour tout $i \in \{1,2\}$, $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $B \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, on a l'équivalence suivante :

$$A = \iota_i(B) \Leftrightarrow \mu_{Y,i}(A) = \chi_B. \tag{D.2}$$

Si ϕ préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$, soit $B \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$. D'après (D.2), on a $\mu_{Y,1}(\iota_1(B)) = \chi_B$, mais alors $\mu_{Y,2}(\phi(\iota_1(B)) = \chi_B$, ce qui toujours d'après (D.2) nous donne $\phi(\iota_1(B)) = \iota_2(B)$. On a donc bien la commutativité de diagramme annoncée. □

Lorsque l'une des conditions de la proposition ci-dessus seront satisfaites, on oubliera les plongements ι_1 et ι_2 pour dire que ϕ est un isomorphisme d'algèbres de mesure **au dessus de** $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$. Le théorème suivant dit ainsi qu'il n'y a qu'une inclusion $\mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ de type II à automorphisme au dessus de $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ près.

Théorème D.3. *Soient* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, $\mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$ *deux algèbres de mesure sans atomes. Soit* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ *une algèbre de mesure et soient* $\iota_1 : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *et* $\iota_2 : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \hookrightarrow \mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$ *deux plongements dont les images* $\iota_i(\mathrm{MAlg}(Y,\nu))$ *sont des sous-algèbres de type II de* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *et* $\mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$ *respectivement. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres de mesure* $\phi : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$ *au dessus de* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

Comme $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$ est sans atomes, on a un modèle agréable pour la situation décrite par le théorème précédent, qui est l'inclusion $\pi_Y^{-1} : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \to \mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$. Le corollaire suivant est alors une conséquence immédiate.

Corollaire D.4. *Soit* $N = \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \subseteq \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *une sous-algèbre de type II. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres de mesure* $\phi : \mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2))$ *au dessus de* $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

Démonstration du théorème D.3. La preuve est la même que celle du théorème A.12 : on commence par fixer (a_n) dense dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et (b_n) dense dans $\mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$, et en utilisant la proposition D.1 on construit par récurrence une famille croissante d'isomorphismes entre des sous-algèbres finies φ_n dont le domaine contient $\{a_i : i \leqslant n\}$ et l'image contient $\{b_i : i \leqslant n\}$, avec la propriété additionnelle que chaque φ_n préserve la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$.

On peut alors étendre de manière unique ces φ_n en un isomorphisme ϕ entre $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ et $\mathrm{MAlg}(Z,\lambda)$; on vérifie alors aisément qu'un tel isomorphisme préserve la mesure conditionnelle, ce qui d'après la proposition D.2 implique la commutativité du diagramme ci-dessus. □

Remarque D.5. Ce théorème permet de donner la désintégration de μ par rapport à la projection sur (Y,ν) : dans le modèle $Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, celle-ci est donnée par les mesures $\mu_y = \delta_y \otimes \mathcal{B}(1/2)$ où $y \in Y$. Dans le cas général (non nécessairement de type II), on a une partie de type I dont la description est aisée ; on obtient alors un théorème de désintégration pour les mesures de probabilité sur un borélien standard. Cependant, n'en ayant pas besoin, nous nous contenterons du corollaire D.4.

Nous pouvons maintenant décrire explicitement le groupe des automorphismes préservant la mesure conditionnelle par rapport à Y. La preuve que nous donnons est inspirée de celle de la proposition 2.14, avec quelques complications techniques dues au fait que $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ n'est pas séparable lorsqu'on le munit de la distance d_u.

Théorème D.6. *Soit* (Y,ν) *un espace de probabilité standard, et soit* $(X,\mu) = (Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \nu \otimes \mathcal{B}(1/2)$. *Alors le sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ *formé des automorphismes préservant la mesure conditionnelle par rapport à* Y *s'identifie à* $\mathrm{L}^0(Y, \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2)))$, *ce dernier agissant sur* $Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *fibre par fibre.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ préservant la mesure conditionnelle par rapport à Y. Pour tout $A \subseteq Y$, la mesure conditionnelle de $\pi_Y^{-1}(A)$ est à valeur dans $\{0,1\}$, et comme φ préserve la mesure conditionnelle par rapport à Y, on doit avoir $\varphi^{-1}\pi_Y^{-1}(A) = \pi_Y^{-1}(A)$. Ceci se traduit en $\pi_Y(\varphi(x,y)) = y$ pour presque tout $(y,z) \in Y \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ d'après la partie "unicité" du théorème A.14. On dispose alors d'un ensemble φ-invariant de mesure pleine en restriction duquel φ préserve les fibres au dessus de Y.

Supposons que sur un ensemble de mesure positive, μ_y ne soit pas préservée par φ. Par séparabilité de $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$, on dispose de $B \in \mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2))$ non nul et de $A \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ tels que pour presque tout $y \in A$, $\mu_y(\varphi(B)) \neq \mu_y(B)$. Alors la mesure conditionnelle de $A \times B$ n'est pas préservée, ce qui est contradictoire. Ainsi pour presque tout y, φ induit une application $\varphi_y \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(1/2)$, et il s'agit de vérifier la mesurabilité de $y \mapsto \varphi_y$.

Notons $\lambda = \mathcal{B}(1/2)$, et soient dont $A, B \in \mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$. On a $\lambda(\varphi_y(Y \times A) \triangle B) < \epsilon$ ssi $\mu_y(\varphi(A) \triangle (Y \times B)) < \epsilon$, et cette dernière condition est bien mesurable par le théorème de Fubini.

Il s'agit maintenant de voir que l'application entre le groupe des automorphismes préservant la mesure conditionnelle par rapport à $\mathrm{MAlg}(Y,\nu)$ et $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda))$ est surjective. Pour celà, on veut utiliser le fait qu'elle est isométrique et que son image contient une partie dense de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda))$. Par le chapitre C, on dispose sur $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda))$ de la distance

$$d^1(f,g) = \int_Y d(f(y), g(y)) d\lambda(y)$$

où d est une distance sur $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$ compatible avec sa topologie. Soit (A_n) une suite dense d'éléments de $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$, alors la distance invariante à gauche

$$d(T,T') = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \mu(T(A_n) \triangle T'(A_n))$$

induit bien la topologie faible sur $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$ par densité de (A_n). Soient maintenant T et T' deux automorphismes préservant la mesure conditionnelle par rapport à Y, alors en les voyant comme des éléments de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda))$, on a

$$\begin{aligned} d^1(T,T') &= \int_Y \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_y(T_y(A_n) \triangle T'_y(A_n)) d\nu(y) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_Y \mu_y(T(Y \times A_n) \triangle T'(Y \times A_n)) d\nu(y) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T(Y \times A_n) \triangle T'(Y \times A_n)). \end{aligned}$$

Autrement dit, la topologie sur $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda))$ est la topologie de la convergence simple restreinte aux ensembles de la forme $Y \times A$ pour $A \in \mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$. Il s'agit donc de voir que $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ muni de la topologie faible induit bien une telle topologie sur le groupe des automorphismes préservant la mesure conditionnelle. Supposons donc qu'une suite (T_n) d'automorphismes préservant la mesure conditionnelle soit telle que $\mu(T(Y \times A) \triangle Y \times A) \to 0$, et montrons qu'alors $T_n \to \mathrm{id}_X$ pour la topologie faible. Il suffit de se restreindre à des rectangles, c'est-à-dire de vérifier que $\mu(T_n(B \times A) \triangle B \times A) \to 0$ pour tous $(A,B) \in \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \times \mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$. On remarque alors que comme T et T' préservent les fibres au dessus de Y, on a $T(B \times A) \triangle T'(B \times A) \subseteq T(Y \times A) \triangle T'(Y \times A))$, et donc, sur l'ensemble des automorphismes préservant la mesure conditionnelle, la topologie induite par la topologie faible est bien la topologie de la convergence simple pour les ensembles de la forme $Y \times A$ où $A \in \mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \lambda)$.

On a ainsi une isométrie entre le groupe des automorphismes préservant μ_Y muni de la distance $d(T,T') = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T(Y\times A_n)\,\triangle\, T'(Y\times A_n))$ et $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\lambda))$ muni de la distance d^1, et la surjectivité se voit en constatant, tout comme dans la preuve de la proposition 2.14, que la partie dense de $\mathrm{L}^0(Y,\nu,\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\lambda))$ donnée par la proposition C.5 est bien réalisée par des éléments de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ préservant μ_Y. $\square$

Bibliographie

[Bax71] J. R. Baxter. A class of ergodic transformations having simple spectrum. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27 :275–279, 1971.

[CFW81] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(4) :431–450 (1982), 1981.

[Dan95] A. I. Danilenko. The topological structure of Polish groups and groupoids of measure space transformations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 31(5) :913–940, 1995.

[dJ76] A. del Junco. Transformations with discrete spectrum are stacking transformations. *Canad. J. Math.*, 28(4) :836–839, 1976.

[Dye59] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformation. I. *Amer. J. Math.*, 81 :119–159, 1959.

[Dye63] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *Amer. J. Math.*, 85 :551–576, 1963.

[Eig81] S. J. Eigen. On the simplicity of the full group of ergodic transformations. *Israel J. Math.*, 40(3-4) :345–349 (1982), 1981.

[Fat78] A. Fathi. Le groupe des transformations de $[0, 1]$ qui préservent la mesure de Lebesgue est un groupe simple. *Israel J. Math.*, 29(2-3) :302–308, 1978.

[FM77] J. Feldman and C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2) :289–324, 1977.

[Gab00] D. Gaboriau. Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, 139(1) :41–98, 2000.

[Gab10] D. Gaboriau. Orbit equivalence and measured group theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1501–1527, New Delhi, 2010. Hindustan Book Agency.

[Gao09] S. Gao. *Invariant descriptive set theory*, volume 293 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[Gla98] E. Glasner. On minimal actions of Polish groups. *Topology Appl.*, 85(1-3) :119–125, 1998. 8th Prague Topological Symposium on General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra (1996).

[Gla03] E. Glasner. *Ergodic theory via joinings*, volume 101 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[GP07] T. Giordano and V. Pestov. Some extremely amenable groups related to operator algebras and ergodic theory. *J. Inst. Math. Jussieu*, 6(2) :279–315, 2007.

[Grz84] R. Grząślewicz. Density theorems for measurable transformations. *Colloq. Math.*, 48(2) :245–250, 1984.

[Hal60] P. R. Halmos. *Lectures on ergodic theory*. Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

[HS42] P. R. Halmos and H. Samelson. On monothetic groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 28 :254–258, 1942.

[Kal85] R. R. Kallman. Uniqueness results for groups of measure preserving transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95(1) :87–90, 1985.

[Kec95] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Kec10] A. S. Kechris. *Global aspects of ergodic group actions*, volume 160 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[KM04] A. S. Kechris and B. D. Miller. *Topics in orbit equivalence*, volume 1852 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[KT10] J. Kittrell and T. Tsankov. Topological properties of full groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(2) :525–545, 2010.

[KW91] Y. Katznelson and B. Weiss. The classification of nonsingular actions, revisited. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 11(2) :333–348, 1991.

[Lev95] G. Levitt. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(6) :1173–1181, 1995.

[Mac66] G. W. Mackey. Ergodic theory and virtual groups. *Math. Ann.*, 166 :187–207, 1966.

[Mah50] D. Maharam. Decompositions of measure algebras and spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 69 :142–160, 1950.

[Mat13] H. Matui. Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems II. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 33(5) :1542–1549, 2013.

[Mil04] B. D. Miller. *Full groups, classification, and equivalence relations*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2004.

[Orn70] D. Ornstein. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Advances in Math.*, 4 :337–352 (1970), 1970.

[OW80] D. S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(1) :161–164, 1980.

[Oxt80] J. C. Oxtoby. *Measure and category*, volume 2 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1980. A survey of the analogies between topological and measure spaces.

[Pra81] V. S. Prasad. Generating dense subgroups of measure preserving transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(2) :286–288, 1981.

[Ros09] C. Rosendal. Automatic continuity of group homomorphisms. *Bull. Symbolic Logic*, 15(2) :184–214, 2009.

[RS07] C. Rosendal and S. Solecki. Automatic continuity of homomorphisms and fixed points on metric compacta. *Israel J. Math.*, 162 :349–371, 2007.

[Ryz93] V. V. Ryzhikov. Factorization of an automorphism of a full Boolean algebra into the product of three involutions. *Mat. Zametki*, 54(2) :79–84, 159, 1993.

[SU35] J. Schreier and S. Ulam. Sur le nombre des générateurs d'un groupe topologique compact et connexe. *Fundamenta Mathematicae*, 24(1) :302–304, 1935.

[Var63] V. S. Varadarajan. Groups of automorphisms of Borel spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109 :191–220, 1963.

[Zim84] R. J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.